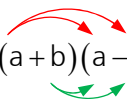


4.4 Faktorzerlegung aus der Differenz zweier Quadrate (Binom)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \overbrace{a^2} \\ \text{Quadrat} \\ \text{(Basis a)} \end{array} - \begin{array}{c} \overbrace{b^2} \\ \text{Quadrat} \\ \text{(Basis b)} \end{array} & = & (a+b)(a-b) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Differenz} & & \text{Produkt}
 \end{array}$$

Man nimmt die Basen der beiden Quadrate und bildet daraus das Produkt aus Summe und Differenz.

Kontrolle:  $(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = \underline{a^2 - b^2}$

Beispiele

1. $100 - c^2 = ?$

2. $9a^2 - 1 = ?$

3. $4m^4 - 9n^4 = ?$

4. $a^4 - b^4 = ?$

5. $(4x + 2y)^2 - 9y^2 = ?$

6. $(a-b)^2 - (a-1)^2 = ?$

4.5 Rückbildung zum Quadrat eines Binoms

$$\underbrace{4x^2}_{\substack{\text{Quadrat} \\ \text{(Basis } 2x)}}} - \underbrace{28x}_{\substack{\text{doppeltes Produkt} \\ \text{der beiden Basen} \\ 2 \cdot (2x \cdot 7)}}} + \underbrace{49}_{\substack{\text{Quadrat} \\ \text{(Basis } 7)}}} =$$

↓

Summe

$$(2x - 7)^2$$

↓

Produkt

Merke: Die Anzahl Glieder ist drei (Trinome).

Kontrolle: $(2x - 7)(2x - 7) = 4x^2 - 14x - 14x + 49 = \underline{\underline{4x^2 - 28x + 49}}$

Beispiele

1. $x^2 + 10x + 25 = ?$

2. $n^2 - 2n + 1 = ?$

3. $9x^2 + 6x + 1 = ?$

4. $50a^2 - 60ab + 18b^2 = ?$

Achtung: Zuerst gemeinsamen Faktor ausklammern!

4.6 Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat 1 ist

$1x^2$	+	$7x$	+	12	=	$(x + 3)(x + 4)$
↓		↓		↓		
Quadrat mit Faktor 1		$(3) + (4)$ Summe = 7		$(3) \cdot (4)$ Produkt = 12		

Merke: Die Anzahl Glieder ist 3 (Trinome) und der Faktor vor dem quadratischen Term ist 1!

Kontrolle: $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12 = \underline{\underline{x^2 + 7x + 12}}$

Beispiele

1. $x^2 - 7x + 12 = ?$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. $y^2 - 17y + 60 = ?$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. $x^2 - 6x + 5 = ?$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. $d^2 + 8d + 15 = ?$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

5. $a^2 - 11a - 26 = ?$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

6. $3x^2 + 6x - 45 = ?$

Achtung: Zuerst gemeinsamen Faktor ausklammern!

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4.8 Rückbildung von Summen und Differenzen

a. gleichhoher ungerader Potenzen

Differenz:

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a^5 - b^5) = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$(a^7 - b^7) = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

usw.

Summe:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a^5 + b^5) = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$(a^7 + b^7) = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

usw.

b. gleichhoher gerader Potenzen

Differenz:

→ kann zerlegt werden nach Regel «Differenz zweier Quadrate»

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

$$(a^4 - b^4) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

usw.

→ oder nach der Regel unter Punkt a) (siehe oben)

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

$$(a^4 - b^4) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$(a^6 - b^6) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

Summe:

$$\left. \begin{array}{l} (a^2 + b^2) = \\ (a^4 + b^4) = \\ \text{usw.} = \end{array} \right\} \text{kann nicht faktorisiert werden!}$$

4.9 Faktorzerlegung, Übersicht über die verschiedenen Vorgehensweisen

<p>1. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus allen Gliedern.</p>	$\underbrace{15ab - 6ac + 3ad}_{\text{Summe}} = 3a \underbrace{(5b - 2c + d)}_{\text{Produkt}}$
<p>2. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus Gruppen von zwei oder mehreren Gliedern (mehrmaliges Ausklammern).</p>	$\underbrace{21ax - 6x}_{3x(7a-2)} - \underbrace{35a + 10}_{-5(7a-2)} = 3x(7a-2) - 5(7a-2) = (7a-2)(3x-5)$
<p>3. Differenz zweier Quadrate (Binom). Typ: $a^2 - b^2$</p>	$\underbrace{a^2}_{\text{Quadrat}} - \underbrace{b^2}_{\text{Quadrat}} = (a-b)(a+b)$
<p>4. Rückbildung zum Quadrat eines Binoms. Typen: $a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $a^2 - 2ab + b^2$</p>	$\underbrace{4x^2}_{\text{Quadrat (Basis 2x)}} - \underbrace{28x}_{\text{doppeltes Produkt der beiden Basen } 2(2x \cdot 7)} + \underbrace{49}_{\text{Quadrat (Basis 7)}} = (2x-7)^2$
<p>5. Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat 1 ist.</p>	$\underbrace{1x^2}_{\text{Quadrat mit Faktor 1}} + \underbrace{7x}_{\text{Summe (3)+(4)}} + \underbrace{12}_{\text{Produkt (3)(4)}} = (x+3)(x+4)$
<p>6. Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat $\neq 1$ ist.</p>	$\underbrace{10x^2}_{\text{Quadrat mit Faktor } \neq 1} + \underbrace{19x}_{\text{Summe } 5x \cdot 3 + 2x \cdot 2} + \underbrace{6}_{\text{Produkt } 3 \cdot 2} = (2x+3)(5x+2)$
<p>7. Rückbildung von Summen und Differenzen gleichhoher ungerader Potenzen.</p>	$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $(a^5 - b^5) = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ $(a^7 - b^7) = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$ <p>usw.</p> $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $(a^5 + b^5) = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ $(a^7 + b^7) = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$ <p>usw.</p>

4.10 Faktorzerlegung mit dem TI

Beispiel 1 $10x^2 + 19xy + 6y^2 = ?$

Eingabe: Faktor($10x^2 + 19x * y + 6y^2$)

Ergebnis: $(2x + 3y)(5x + 2y)$

Hinweis: Die Funktion Faktor() ist über **F2** erreichbar.
Die Buchstaben x, y und z werden mit den Tasten **X**, **Y** und **Z** eingegeben. Die Taste **alpha** ist bei den Buchstaben x, y, z und t nicht notwendig!
Das **Multiplikationszeichen** **x** zwischen x und y ist **notwendig**.
Tipp: Anzeige kontrollieren, Sie merken anhand der falschen Schreibweise, dass der Rechner xy als eine Variable anschaut!
Die Berechnung wird mit der Taste **ENTER** ausgeführt.

Beispiel 2 $x^3 + y^3 = ?$

Eingabe: Faktor($x^3 + y^3$)

Ergebnis: $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Hinweis: Die Funktion Faktor() ist über **F2** erreichbar.
Die Buchstaben x, y und z werden mit den Tasten **X**, **Y** und **Z** eingegeben. Die Taste **alpha** ist bei den Buchstaben x, y, z und t nicht notwendig!
Die Berechnung wird mit der Taste **ENTER** ausgeführt.

Beispiel 3 $u^3 + u^2v^2 - vu^2 - v^3u = ?$

Eingabe: Faktor($u^3 + u^2v^2 - v * u^2 - v^3u = ?$)

Ergebnis: $u(u - v)(u + v^2)$

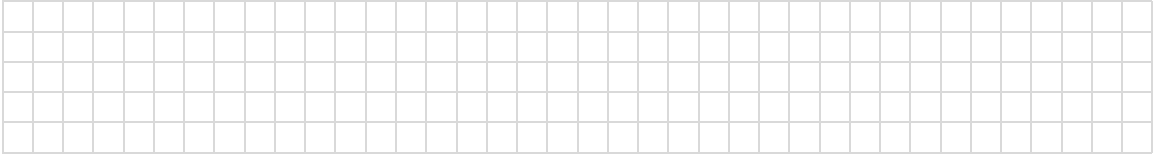
Hinweis: Die Funktion Faktor() ist über **F2** erreichbar.
Das **Multiplikationszeichen** **x** zwischen v und u^2 ist **notwendig**.
Tipp: Anzeige kontrollieren, Sie merken anhand der falschen Schreibweise, dass der Rechner vu als eine Variable anschaut!
Die Berechnung wird mit der Taste **ENTER** ausgeführt.

4.11 Übungen, Frommenwiler

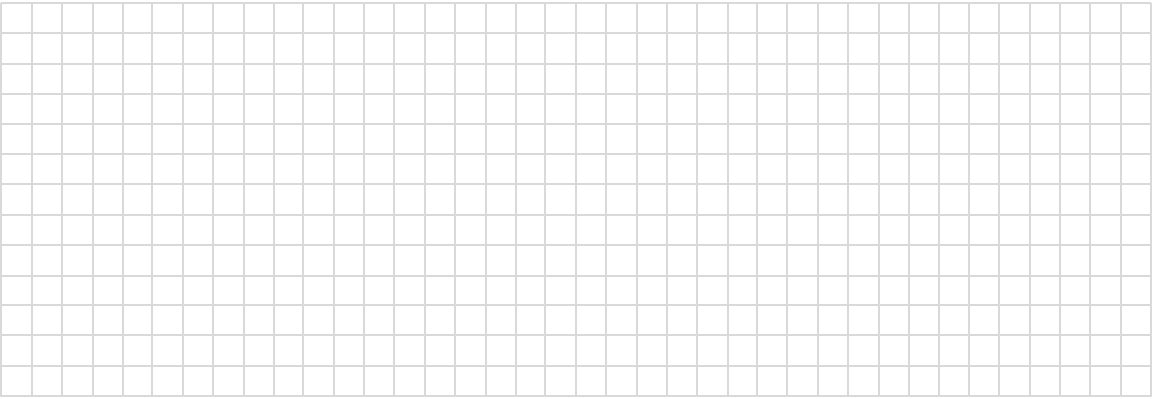
Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
29 (alle)	18	Kontrolle mit TI üben
30 (d bis h)	18	Kontrolle mit TI üben
31 (b, d bis i)	18	Kontrolle mit TI üben
32 (alle)	19	Kontrolle mit TI üben
33 (b, d, f bis l)	19	Kontrolle mit TI üben
34 (a, c, e, g, h und i)	19	Kontrolle mit TI üben
35 (a, c, e, g, i und k)	19	Kontrolle mit TI üben
36 (c bis f)	19	Kontrolle mit TI üben
37 (alle)	20	Kontrolle mit TI üben
38 (alle) → GSBM (a und b)	20	Kontrolle mit TI üben
39 (alle) → GSBM (a und b)	20	Kontrolle mit TI üben

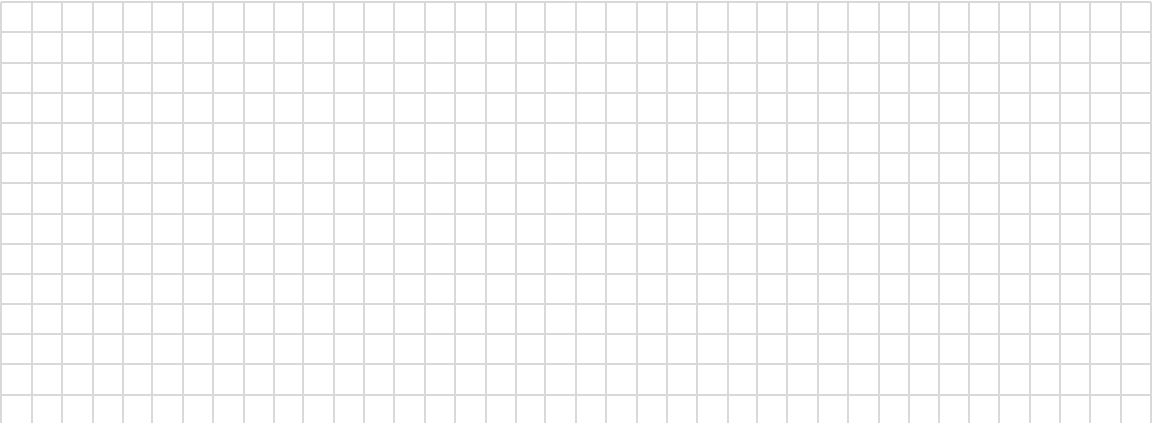
7. $r^2 + rs + s^2 + r + sr + s = ?$



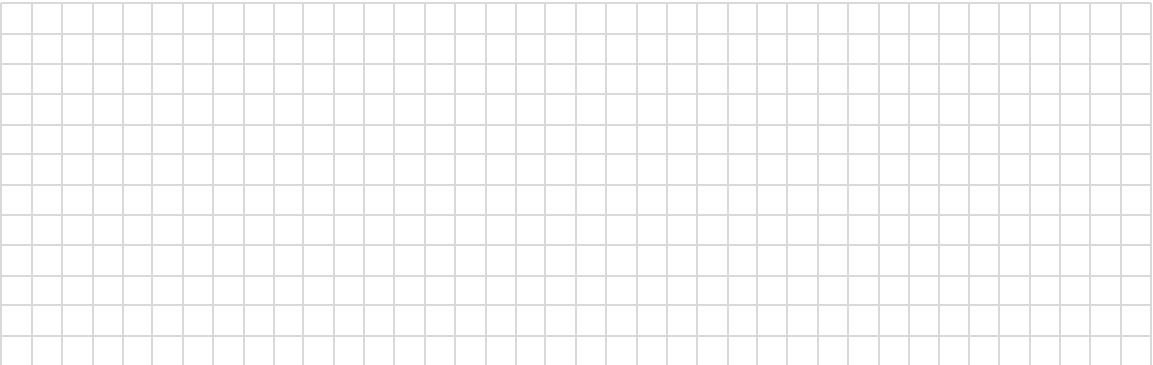
8. $(3a^2 - 2a + 3)^2 - (a^2 - 6a + 1)^2 = ?$



9. $\frac{(v^2 - u^2)[(u - v)^2 - (u + v)^2]}{u^2v - uv^2} = ?$

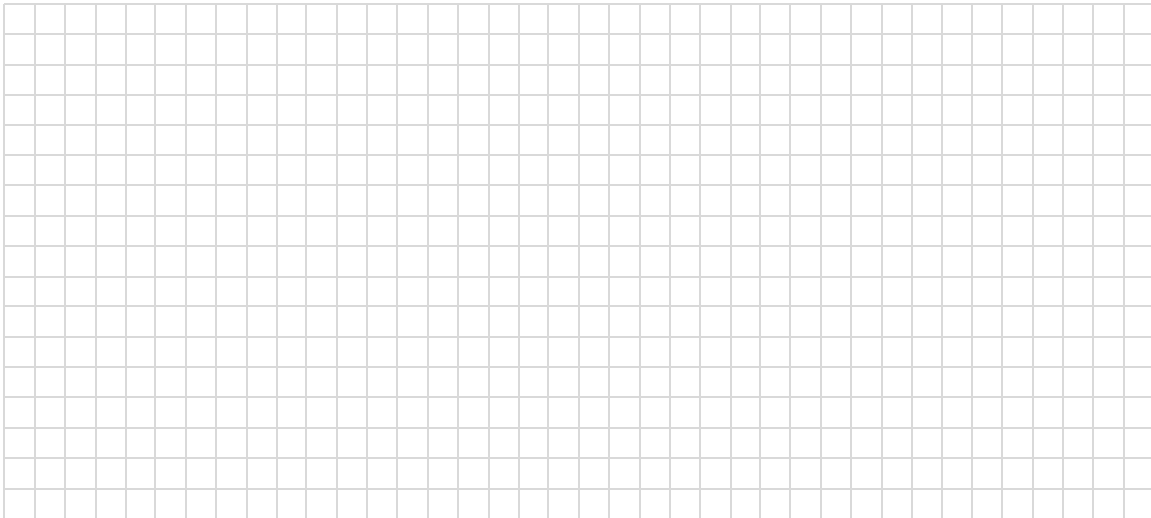


10. $\frac{x^2 + y^2 - 2xy - w^2}{x^2 - y^2 + w^2 + 2wx} = ?$



$$11. \frac{(a-b+c)^2 - (a+b+c)^2}{a+c} = ?$$

(Rapperswil 1987)



$$12. \frac{(x+y)\left[(x^2+y^2)(x-y) - (x-y)\right]}{(x-y)\left[(x+y) - (x^2+y^2)(x+y)\right]} = ?$$

(Biel 1987)



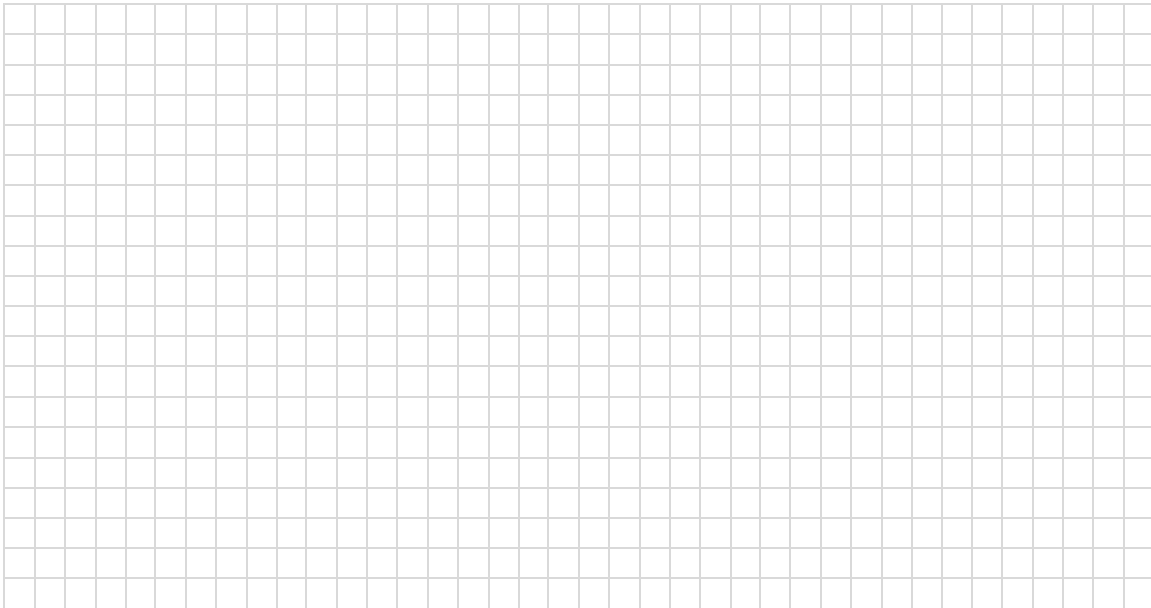
$$13. \frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}{a^2 - b^2} = ?$$

(Biel 1987)



$$14. \frac{(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a^4 + a^3b - ab^3 - b^4)}{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2} = ?$$

(Biel 1987)



$$15. \frac{(18m^3n^2 - 6m^3n + 9m^2n^2 - 3m^2n)(m^2n + 2mn^2 + n^3)}{(m^2 - n^2)(12m^2n^2 + 6mn^2)} = ?$$

(Frauenfeld 1996)

