6 Potenzieren

6.1 Einführung

Wenn bei einer Multiplikation lauter gleiche Faktoren auftreten, so wird dafür meistens die Potenzschreibweise gewählt.

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n-\text{Faktoren}} = \underbrace{a^n}_{\text{Potenzwert}}}$$

a: Basis oder Grundzahl, $a \in \mathbb{R}$
n: Exponent oder Hochzahl, $n \in \mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

Es ist $a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ \ldots$

Basis der Potenz ist 0

Ist die Basis a einer Potenz a^n die 0, ist das zugehörige Produkt ebenfalls 0.
$0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$

Basis der Potenz ist 1

Ist die Basis a einer Potenz a^n die 1, ist das zugehörige Produkt ebenfalls 1.
$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

Das Vorzeichen beim Potenzieren

Bei positiver Basis ist der Wert der Potenz immer positiv.

$$\boxed{(+a)^n = +a^n}$$

z. B. $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +2^2 = +4$
z. B. $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +2^3 = +8$

Bei negativer Basis ist der Wert der Potenz positiv, wenn der Exponent gerade ist.

$$\boxed{(-a)^{2n} = +a^{2n}}$$

$n \in \mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
z. B. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +2^4 = 16$

Bei negativer Basis ist der Wert der Potenz auch negativ, wenn der Exponent ungerade ist.

$$\boxed{(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}}$$

$n \in \mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$
z. B. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^3 = -8$

Achtung, beachten Sie den Unterschied:

$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -(3^2) = -9$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

$\underbrace{2a^3}_{2 \cdot a \cdot a \cdot a} \neq \underbrace{(2a)^3}_{2a \cdot 2a \cdot 2a}$

6.2 Addition und Subtraktion von Potenzen

Bei der Addition und bei der Subtraktion können **nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten** zusammengefasst werden. Dabei werden die Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele

a. $6a^2 + 2a^2 - b^3 + 2b^2 - b^3 = \underline{\underline{8a^2 - 2b^3 + 2b^2}}$

b. $3a^2b - ab^2 + 2a^2b = \underline{\underline{5a^2b - ab^2}}$

6.3 Multiplikation und Division von Potenzen

Bei der Multiplikation und Division werden zwei Fälle unterschieden. Zum einen können Potenzen gleiche Basen, zum anderen gleiche Exponenten besitzen.

Gleiche Basen – Multiplikation

1. Potenzsatz

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Beweis

$$a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{5+3} = a^8$$

Potenzen mit gleicher Basis werden **multipliziert**, indem man die Basis unverändert lässt und die **Exponenten addiert**.

Beispiele

Wenden Sie den 1. Potenzsatz an:

1. $a^3 \cdot a \cdot a^2 = ?$

2. $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = ?$

3. $2a^2b^3 \cdot 3ab^5 = ?$

4. $a^{5x-y} \cdot a^{x-y} = ?$

5. $10^6 \cdot 10 \cdot 1'000 = ?$

Gleiche Basen – Division

2. Potenzsatz

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Beweis

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^{5-3} = a^2$$

Potenzen mit gleicher Basis werden **dividiert**, indem man die Basis unverändert lässt und die Exponenten **subtrahiert**.

Beispiele

Wenden Sie den 2. Potenzsatz an:

1. $x^7 : x^5 = ?$

2. $\frac{a^{n+1} \cdot c^x}{a^n \cdot c^{x-1}} = ?$

3. $10^3 : 10^{-5} = ?$

4. $\frac{12x^{-n}y^{2n}}{4x^{-(n+1)}y^{-4n}} = ?$

Luzern, alte BM-Prüfung (analog Nummer 4 oben)

5. $\left[12x^{-n}y^{2n} + 16x^{2-n}y^{4n} - 20x^{-(n-2)}y^{-2n}\right] : \left[4x^{-(n+1)}y^{-4n}\right] = ?$ schrittweise zeigen!

Schwierigkeit Nr. 1

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$$

mit der Formel (2. Potenzsatz) erhält man:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$$

Dieses Problem lässt sich nur aus der Welt schaffen, indem man festsetzt (definiert):

$$\boxed{a^0 = 1}$$

gilt für $a \neq 0$, der Ausdruck 0^0 ist **nicht** definiert!

Schwierigkeit Nr. 2

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

mit der Formel (2. Potenzsatz) erhält man:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Dieses Problem lässt sich nur aus der Welt schaffen, indem man festsetzt (definiert):

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

gilt für $a \neq 0$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

gilt für $a \neq 0$, $b \neq 0$

andere Beweisführung für Schwierigkeit Nr. 2 (über $a^0 = 1$):

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Gleiche Exponenten – Multiplikation

3. Potenzsatz

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

Beweis

$$a^3 \cdot b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$$

Potenzen mit gleichen Exponenten aber ungleichen Basen werden **multipliziert**, indem man die **Basen multipliziert** und den **Exponenten beibehält.**

Beispiele

Wenden Sie den 3. Potenzsatz an:

1. $25^3 \cdot 4^3 = ?$

2. $(4xy)^2 \cdot xy^2 = ?$

3. $(x-2)^m \cdot x^m = ?$

4. $\left(\frac{4}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-m} = ?$

5. $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^3 = ?$

Gleiche Exponenten – Division

4. Potenzsatz

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

Beweis

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Potenzen mit gleichen Exponenten aber ungleichen Basen werden **dividiert**, indem man die **Basen dividiert** und den **Exponenten beibehält.**

Beispiele

Wenden Sie den 4. Potenzsatz an:

1. $24^4 : 6^4 = ?$

2. $\dfrac{(-a)^3}{(-b)^3} = ?$

3. $\dfrac{(4x)^n}{x^n} = ?$

4. $\dfrac{8x^3}{27y^3} = ?$

5. $\dfrac{(a^2 - b^2)^3}{(a+b)^3} = ?$

6. $\dfrac{(9a^2 - 16b^2)^{2n}}{(3a-4b)^{2n}} = ?$

6.4 Potenzieren von Potenzen

5. Potenzsatz

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n\cdot m}$$

Beweis

$$\left(a^{3}\right)^{2} = (a\cdot a\cdot a)^{2} = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a^{3\cdot 2} = a^{6}$$

Hinweis: $a^{3\cdot 2} = a^{2\cdot 3}$, somit gilt: $\left(a^{3}\right)^{2} = \left(a^{2}\right)^{3}$

Potenzen werden **potenziert**, indem man die **Exponenten multipliziert**.

Beispiele

Wenden Sie den 5. Potenzsatz an:

1. $\left(a^{3}\right)^{-3} = ?$

2. $\left(\dfrac{3a^{2}}{2b^{3}}\right)^{3} = ?$

3. $a^{2^{3}} = ?$

4. $\left(a^{2}\right)^{3} = ?$

5. $\left[\left(a^{-2}\right)^{3}\right]^{2} = ?$

6. $\left[2(-x)^{-2}\right]^{-3} = ?$

7. $(-2)^{5}\left[-\left(4x^{-2}\right)^{-1}\right]^{3} = ?$

8. $-\left[4\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^2 = ?$

9. $\left[2\left(a^3x^4\right)^2\right]^3 = ?$

10. $\left[\left(-\frac{x}{2}\right)^{-3}\right]^2 = ?$

11. $\frac{2^{38}\cdot 5^{38}}{10^{72}} = ?$

12. $\frac{3^{102}\cdot 4^{102}}{2^{100}\cdot 6\cdot 6^{99}} = ?$

6.5 Potenzen im Überblick

Definition Potenz:

$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \dots\ \cdot a}_{\text{n–Faktoren}}$ $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\quad (a \neq 0)$ $\qquad (n \in \mathbf{N} \text{ und } a \in \mathbf{R})$

Sonderfälle:

$a^1 = a$ $\qquad a^0 = 1\quad (a \neq 0)$ $\qquad 0^0$ ist nicht definiert

Rechenregeln:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^m : a^n = a^{m-n}\quad (a \neq 0)$ $\qquad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\qquad a^n : b^n = (a:b)^n\quad (a \neq 0)$ $\qquad (n,\ m \in \mathbf{Z} \text{ und } a,\ b\ \in \mathbf{R})$

6.6 Übungen

Wenden Sie die Potenzgesetze an:

1. $\left(b^3\right)^4 = ?$

2. $\left(n^x\right)^2 = ?$

3. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = ?$

4. $\left(-x^{-2}\right)^3 = ?$

5. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = ?$

6. $\left[-\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3\right]^{-1} = ?$

7. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-3} = ?$

8. $\left(a^{n-1}\right)^3 = ?$

9. $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2x^2}{5a^3}\right)^{-1} \cdot 2ax^{-4} = ?$

10. $\left(3ax^3\right)^7 = ?$

11. $\left(b^x\right)^{-n} = ?$

12. $\left(\frac{a^0 \cdot b^2}{c^0}\right)^{2x} = ?$

13. $\left[\left(x^2\right)^3\right]^5 = ?$

14. $\left(\frac{2a^4}{3b^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 : \left(\frac{2a}{3b}\right)^3 = ?$

15. $\frac{\left[(5a)^x\right]^{3b}}{(5a)^{2bx} \cdot (4c)^{bx}} = ?$

16. $7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 36 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = ?$

17. $n^{6x+a} \cdot n^{2x-2a} = ?$

18. $(a+b)^{2a-3} \cdot (a+b)^{4a+6} = ?$

19. $b^{a-n} \cdot b^{a+n} = ?$

20. $2 \cdot (n+x)^{4-3a} \cdot 3 \cdot (n+x)^{3+a} - 4 \cdot (n+x)^7 \cdot 3 \cdot (n+x)^{-2a} = ?$

21. $\frac{n^4}{x^3} \div \frac{n^5 b^2}{cx^5} = ?$

22. $\frac{3a^3b^2}{4n^{-2}d^6} \cdot \frac{3a^{-4}b^3}{d^3n^2} = ?$

23. $\frac{4a^2b^{-6}}{d^2c^{-4}} \div \frac{12a^3b^{-8}}{d^3c^3} = ?$

24. $\left(a^3\right)^2 = ?$

25. $\left(a^{-2} + b^{-3}\right)^{-2} = ?$

26. $\left[\left(n^2x^3\right)^2\right]^{-2} = ?$

6.7 Exponentenschreibweise

In Naturwissenschaft und Technik kommen oft sehr grosse oder sehr kleine Zahlen vor. Zum Beispiel ist die Sonne ungefähr 150000000000 m (Meter) von der Erde entfernt oder ein Elektron trägt die elektrische Ladung von ungefähr 0.00000000000000000016 C (Coulomb) oder rotes Licht hat eine Wellenlänge von 0.00000063 m (Meter). Dies sind sehr unhandliche Zahlen. Deshalb notiert man diese Werte üblicherweise in der wissenschaftlichen Schreibweise oder Exponentenschreibweise. So betragen der Abstand zur Sonne $1.5 \cdot 10^{11}$ m, die Elektronenladung $1.6 \cdot 10^{-19}$ C oder die Wellenlänge von rotem Licht $6.3 \cdot 10^{-7}$ m.

Weiter ist es bei nicht allzu grossen Exponenten üblich, die Zehnerpotenz in einer Vorsilbe (Vorsatz) zu integrieren. So ist der Abstand zur Sonne $150 \cdot 10^{9}$ m = 150 Gm (=Gigameter) oder die Wellenlänge von rotem Licht $630 \cdot 10^{-9}$ = 630 nm (=Nanometer).

Die gebräuchlichen Vorsilben sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Für grosse Zahlen:

Faktor	Vorsilbe	Zeichen
10^{1}	Deka	da
10^{2}	Hekto	h
10^{3}	Kilo	k
10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G
10^{12}	Tera	T
10^{15}	Peta	P
10^{18}	Exa	E

Für kleine Zahlen:

Faktor	Vorsilbe	Zeichen
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	µ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a

Teilweise wird zwischen der wissenschaftlichen und der technischen Schreibweise unterschieden. Bei der technischen Notation sind die Exponenten der Zehnerpotenz immer durch drei teilbar.