12.12 Anwendungen, die mit Gleichungssystemen gelöst werden können

Beispiel 1

Gibt ein Lehrling einem zweiten Lehrling CHF 3.– ab, so haben beide gleich viel Geld; gibt aber der zweite Lehrling dem ersten CHF 2.–, so hat der erste sechsmal so viel wie der zweite. Wie viele Franken hat jeder?

Geg: $\underbrace{L_1 - 3 = L_2 + 3}_{\text{1. Satzteil}}$, $\underbrace{L_2 - 2 = \frac{L_1 + 2}{6}}_{\text{2. Satzteil}}$

Ges: $L_1 = ?$ (Geldbetrag von Lehrling 1 in Franken)

$L_2 = ?$ (Geldbetrag von Lehrling 2 in Franken)

Lösung:

$$L_1 - 3 = L_2 + 3 \qquad (1)$$

$$L_2 - 2 = \frac{L_1 + 2}{6} \qquad (2)$$

aus (1) folgt: $L_1 = L_2 + 6$ (3)

(3) in (2): $L_2 - 2 = \frac{L_2 + 6 + 2}{6}$

$$L_2 - 2 = \frac{L_2 + 8}{6}$$

$$6 \cdot L_2 - 12 = L_2 + 8$$

$$5 \cdot L_2 = 20$$

$$L_2 = \underline{4} \qquad (4)$$

(4) in (3): $L_1 = \underline{10}$

somit: Der Lehrling 1 hat CHF 10.– und der Lehrling 2 hat CHF 4.–.

Beispiel 2

Die jährlichen Zinsen zweier Kapitalien von CHF 7'000 und CHF 15'000 betragen zusammen CHF 1'170. Zu wie viel Prozent ist das erste Kapital ausgeliehen, wenn das zweite Kapital um 1 % niedriger verzinst wird als das erste?

Geg: $K_1 = \text{CHF } 7'000, \quad K_2 = \text{CHF } 15'000, \quad z_1 + z_2 = \text{CHF } 1'170, \quad p_2 = p_1 - 1$

Ges: $p_1 = ?$ $\quad$ (Zinssatz in % von Kapital K_1)

Lösung:

$$z = z_1 + z_2 = \frac{K_1 \cdot p_1}{100} + \frac{K_2 \cdot p_2}{100} \qquad (1)$$

$$p_2 = p_1 - 1 \qquad (2)$$

(2) in (1): $$z = \frac{K_1 \cdot p_1}{100} + \frac{K_2 \cdot (p_1 - 1)}{100}$$

Wert eingesetzt: $$1'170 = \frac{7'000 \cdot p_1}{100} + \frac{15'000 \cdot (p_1 - 1)}{100}$$

$$1'170 = 70p_1 + 150p_1 - 150$$

$$1'320 = 220p_1$$

$$p_1 = \frac{1'320}{220} = \underline{\underline{6}} \qquad (3)$$

(3) in (2): $p_2 = p_1 - 1 = 6 - 1 = \underline{5}$ (für Kontrolle)

somit: Das Kapital 1 ist zu 6 % ausgeliehen.

Beispiel 3

Jemand hat für seinen Urlaub von bestimmter Dauer eine bestimmte Summe Geldes gespart. Gibt er täglich CHF 36 aus, so kommt er mit dem Geld neun Tage länger aus als vorgesehen; gibt er aber täglich CHF 51 Franken aus, so muss er seinen Urlaub um einen Tag abkürzen. Wie lange sollte seine Urlaubsreise dauern, und wie viel Geld hatte er gespart?

Geg: siehe Übersicht in der Tabelle

Ges: $x = ?$ (ursprünglich geplante Reisedauer in Tagen)

$y = ?$ (gespartes Geld für die geplante Reise in CHF)

Lösung:

Analyse der **beiden** Varianten:

	Variante 1	Variante 2
Dauer des Urlaubs in Tagen $\left[\text{Tagen}\right]$	$x + 9$	$x - 1$
Ausgaben pro Tag $\left[\frac{\text{CHF}}{\text{Tag}}\right]$	36	51
Totalkosten in Franken $\left[\text{CHF}\right]$	$y = (x+9)\cdot 36$	$y = (x-1)\cdot 51$

$y = (x+9)\cdot 36$ (1)

$y = (x-1)\cdot 51$ (2)

(1) = (2):

$$(x+9)\cdot 36 = (x-1)\cdot 51$$
$$36x + 324 = 51x - 51 \quad \left|-36x+51\right.$$
$$375 = 15x \quad \left|:18\right.$$
$$x = \underline{25} \qquad (3)$$

(3) in (2): $y = (25-1)\cdot 51 = \underline{1'224}$

somit: Die Reise sollte 25 Tage dauern, das gesparte Geld beträgt CHF 1'224.

Beispiel 4

Setzt man im Musiksaal 6 Sängerinnen auf jede Bank, so haben 5 Sängerinnen keinen Platz. Setzt man dagegen 7 Sängerinnen auf jede Bank, so kommen auf die letzte Bank nur 3 Sängerinnen. Wie viele Bänke sind vorhanden **und** aus wie vielen Sängerinnen besteht der Chor?

Geg: siehe Skizzen

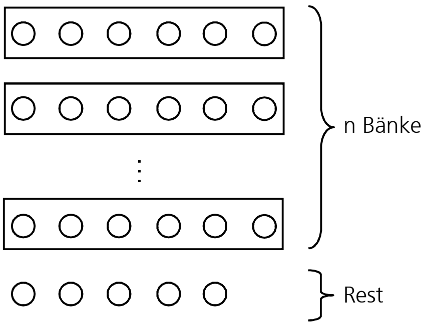
Ges: $n = ?$ (Anzahl Bänke im Musiksaal)

$S = ?$ (Anzahl Sängerinnen des Chors)

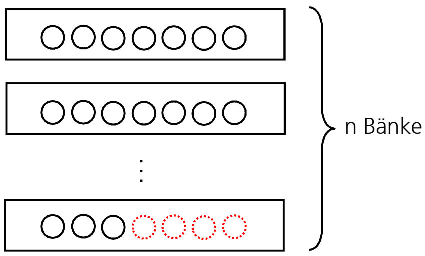
Lösung:

Analyse der **beiden** Situationen:

Situation 1



Situation 2



$S = 6 \cdot n + 5$ aus Situation 1 (1)

$S = 7 \cdot n - 4$ aus Situation 2 (2)

$(1) = (2)$: $6n + 5 = 7n - 4 \quad | -6n + 4$

$\underline{9} = n \quad (3)$

(3) in (1): $S = 6 \cdot 9 + 5 = \underline{59}$

somit: Es sind 9 Bänke und der Chor besteht aus 59 Sängerinnen.

Beispiel 5 (BM-Aufnahmeprüfung 2008)

Für eine Abendveranstaltung müssen transportable Kassen mit Wechselgeld bereitgestellt werden. Jede Kasse enthält 73 Geldscheine, welche zusammen einen Wert von CHF 2'700 haben. 17 davon sind Zwanzigernoten, der Rest Zehner- und Fünfzigernoten.
Wie viele Noten von jedem Wert sind in den Kassen?

Geg: $T = 2'700$ (Gesamtwert einer Kasse)
$z_W = 17$ (Anzahl Zwanzigernoten einer Kasse)
Ges: $z = ?$ (Anzahl Zehnernoten einer Kasse)
$f = ?$ (Anzahl Fünfzigernoten einer Kasse)

Lösung:

Analyse des Textes:

	10er Noten	20er Noten	50er Noten
Anzahl Noten [Stück]	z	17	f
Wert pro Note (Stück) $\left[\frac{\text{CHF}}{\text{Stück}}\right]$	10	20	50
Totaler Wert in Franken [CHF]	$z \cdot 10$	$17 \cdot 20 = 340$	$f \cdot 50$

$$\underbrace{z + z_W + f = 73}_{\text{Gesamtanzahl aller Geldschein}} \quad (1)$$

$$\underbrace{T = z \cdot 10 + 17 \cdot 20 + f \cdot 50}_{\text{Gesamtwert einer Kasse}} \quad (2)$$

aus (1): $z = 73 - 17 - f = 56 - f$ (3)

(3) in (2): $\underbrace{2'700}_{T} = (56 - f) \cdot 10 + 17 \cdot 20 + f \cdot 50$

$2'700 = 560 - 10f + 340 + 50f$
$1'800 = 40f$
$f = \underline{45}$ (4)

(4) in (3): $z = 56 - f = 56 - 45 = \underline{11}$

somit: Es hat 11 10er Noten, 17 20er Noten und 45 50er Noten in der Kasse.

Beispiel 6

150 Personen, Erwachsene und Kinder, nehmen an einem Skiausflug teil. Die Gesamtkosten für die Kinder betragen CHF 5'400, diejenigen für die Erwachsenen CHF 750, wobei ein Erwachsener CHF 10 mehr als ein Kind bezahlen muss.

Wie viele Kinder nehmen am Skiausflug teil und wie viel muss ein Erwachsener für den Skiausflug zahlen?

Geg: siehe Tabelle

Ges: $x = ?$ (Anzahl Kinder)

$y = ?$ (Kosten pro erwachsene Person)

Lösung:

Analyse des Textes:

	Kinder	Erwachsene
Anzahl Personen [Stück]	x	$150 - x$
Kosten pro Person (Stück) $\left[\frac{\text{CHF}}{\text{Stück}}\right]$	$y - 10$	y
Gesamtkosten in Franken [CHF]	$x \cdot (y-10) = 5'400$	$(150-x) \cdot y = 750$

$$x \cdot (y-10) = 5'400 \qquad (1)$$
$$(150-x) \cdot y = 750 \qquad (2)$$

aus (1): $$x = \frac{5'400}{y-10} \qquad (3)$$

(3) in (2):
$$\left(150 - \frac{5'400}{y-10}\right) \cdot y = 750 \qquad |\cdot(y-10)$$
$$\left[150(y-10) - 5'400\right] \cdot y = 750(y-10)$$
$$150y^2 - 1'500y - 5'400y = 750y - 7'500 \qquad | -750y + 7'500$$
$$150y^2 - 7'650y + 7'500 = 0 \qquad |:150$$
$$y^2 - 51y + 50 = 0$$
$$(y-50)(y-1) = 0$$
$$y_1 = \underline{50} \quad \vee \quad \underbrace{y_2 = 1}_{\text{unmöglich, x darf nicht negativ sein}} \qquad (4)$$

(4) in (3): $$x = \frac{5'400}{y-10} = \frac{5'400}{50-10} = \underline{135}$$

somit: 135 Kinder nehmen teil und ein Erwachsener muss CHF 50.– bezahlen.

Beispiel 7

Eine Firma bestellt bei einem Importeur 20 neue Computer und 15 Notebooks; der Kostenvoranschlag beläuft sich auf CHF 130'000.
Wegen eines Irrtums werden jedoch 15 Computer und 20 Notebooks geliefert, wodurch sich die Rechnung um CHF 2'500 erhöht.

Berechnen Sie den Stückpreis der Computer und Notebooks.

Geg: siehe Tabelle

Ges: $x = ?$ (Stückpreis pro Computer)

$y = ?$ (Stückpreis pro Notebook)

Lösung:

Analyse des Textes:

	Bestellung		Irrtümliche Lieferung	
	PC	N-Books	PC	N-Books
Anzahl [Stück]	20	15	15	20
Stückpreis $\left[\frac{\text{CHF}}{\text{Stück}}\right]$	x	y	x	y
Gesamtkosten in Franken [CHF]	20x	15y	15x	20y

$$20x + 15y = 130'000 \qquad |\cdot 2 \qquad (1)$$

$$15x + 20y = 132'500 \qquad |\cdot(-1.5) \qquad (2)$$

aus (1): $40x + 30x = 260'000$ (1a)

aus (2): $\underline{-22.5x - 30y = -198'750}$ (2a)

(1a) + (2a): $17.5x = 61'250$

$x = \underline{3'500}$ (3)

(3) in (1): $20 \cdot 3'500 + 15y = 130'000$

$15y = 60'000$

$y = \underline{4'000}$

somit: Stückpreis betragen CHF 3'500 (Computer) und CHF 4'000 (Notebook).

Beispiel 8

a. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die beiden Punkte P_1 (– 45 / 48) und P_2 (215 / – 108) geht.
b. Berechnen Sie die Schnittpunkte A und B dieser Geraden mit der y-Achse (A) und der x-Achse (B).
c. In welchem Punkt (S) schneidet diese Gerade eine zweite Gerade, die im Abstand von 45 parallel zur y-Achse verläuft?

Geg: $P_1(-45|48),\ P_2(215|-108),\ y_2 = 45$

Ges: $y = mx + b$ (Steigung m und y-Achsabschnitt b)

$A = ?$ (Koordinaten Schnittpunkt mit der y-Achse)

$B = ?$ (Koordinaten Schnittpunkt mit der x-Achse)

$S = ?$ (Koordinaten Schnittpunkt mit der $y_2 = 45$)

Lösung:

$$48 = m \cdot (-45) + b \qquad (1)$$

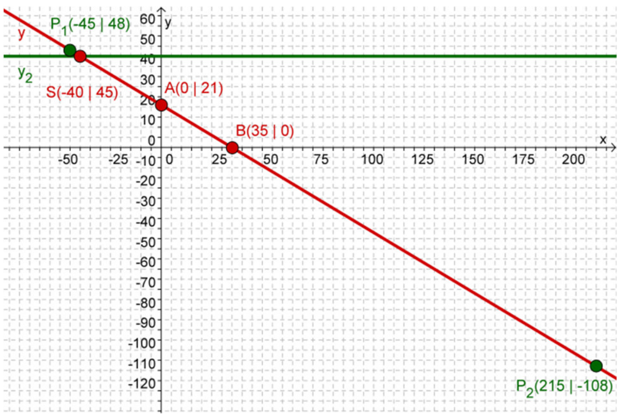
$$-108 = m \cdot 215 + b \qquad |\cdot(-1) \qquad (2)$$

aus (1): $48 = -45m + b$ (1)

aus (2): $\underline{108 = -215m - b}$ (2a)

(1) + (2a): $156 = -260m$

$$m = -\underline{\frac{3}{5}} \qquad (3)$$



(3) in (1): $48 = -45 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + b$

$b = 48 - 27 = \underline{21}$

$$\underline{\underline{y = -\frac{3}{5}x + 21}}$$

Schnittpunkt A: $y = -\frac{3}{5} \cdot 0 + 21 = \underline{21}$ $\qquad \underline{\underline{A(0|21)}}$

Schnittpunkt B: $0 = -\frac{3}{5} \cdot x + 21 \rightarrow x = \underline{35}$ $\qquad \underline{\underline{B(35|0)}}$

Schnittpunkt S: $y = y_2$

$45 = -\frac{3}{5} \cdot x + 21$

$\frac{3}{5}x = -24 \rightarrow x = \underline{-40}$ $\qquad \underline{\underline{S(-40|45)}}$