# 9 Gleichungen

## 9.1 Geschichte

Bereits in den Keilschriften des alten Babylons, die bis 3000 v. Chr. zurückreichen, treten Aussageformen wie Gleichungen auf. Nach den Zahlen gehören sie zu den ersten mathematischen Errungenschaften der Menschheit.
Vor der Bildung einer algebraischen Zeichensprache mussten Gleichungen in Worten oder Bildern dargestellt werden. So zum Beispiel verwendete der um die Algebra verdienstvolle Vieta meist das Verb *aequare* (gleichsetzen). Erst im Jahre 1557 wurde von Robert Recorde das heutige Gleichheitszeichen = eingeführt.

## 9.2 Aussagen und Aussageformen

| | | |
|---|---|---|
| Vergleicht man die Zahlen 6 und 2, so kann man sagen: | | |
| 6 ist grösser als 2, oder<br>6 ist ungleich 2. | $6>2$<br>$6\neq 2$ | wahre Aussagen |
| Vergleicht man die Zahlen 6 und 7, so kann man sagen: | | |
| 6 ist kleiner als 7, oder<br>6 ist ungleich 7. | $6<7$<br>$6\neq 7$ | |
| Weitere wahre Aussage sind: | $6=2\cdot 3$<br>$6=2+4$ | |
| Aussagen müssen nicht immer wahr sein.<br>Es gibt auch falsche Aussagen. | $6>1+5$<br>$6=2\cdot 5$ | falsche Aussagen |

### Definition Aussage

> In der Mathematik spricht man von Aussagen, wenn für einen Sachverhalt entschieden werden kann, ob er **wahr** oder **falsch** ist.

Dieser Sachverhalt wird meist in Form eines Satzes dargestellt, kann aber auch rein mathematisch durch Gleichungen oder Ungleichungen angegeben werden. Eine Aussage ist ein Sachverhalt, dessen Wahrheitsgehalt eindeutig bestimmbar ist.

Keine Aussagen im Sinne der Definition sind:
a. Guten Tag
b. Lieben Sie Brahms?
c. 5 + 7 + 8

## Beispiele

Welche Beispiele stellen wahre (w), falsche (f) oder überhaupt keine (k) Aussagen dar?

| | w | f | k |
|---|---|---|---|
| a. Wie lange dauert ein Fussballspiel? | | | |
| b. Zürich ist eine Stadt | | | |
| c. x + 3 = 7 | | | |
| d. 23 ist eine Primzahl | | | |
| e. Bring mir das Buch! | | | |
| f. $3.\overline{9} = 4$ | | | |
| g. 99 ist durch 3 teilbar | | | |

## Definition Aussageform

Aussagen mit Leerstellen oder Variablen nennt man Aussageformen.

Sobald man in einer Aussageform alle Variablen konkret belegt, geht die Aussageform in eine Aussage über.

Beispiele für Aussageformen:

a. x ist Teiler von 6 — x: Variable
b. 6 – y = 2 — y: Variable

Eine **Grundmenge** G gibt an, welche Elemente in diese Variable(n) eingesetzt werden können. Durch das Einsetzen eines Elementes der Grundmenge in diese Variable(n) entsteht eine wahre oder falsche Aussage.

Gegeben sei eine Aussageform, dazu eine Grundmenge G. Unter der **Lösungsmenge** L versteht man alle jene Elemente der Grundmenge, welche die Aussageform zu einer wahren Aussage machen.

## Beispiele

a. Aussageform: ………… ist ein Planet.
Grundmenge: G = {Sonne, Venus, Erde, Uri, Mond, Zürichsee, Mars, Pluto}
Lösungsmenge: L = {Venus, Erde, Mars} Hinweis: Pluto, seit 2006 Zwergplanet

b. Aussageform: $2 + x < 7$
Grundmenge: G = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
Lösungsmenge: L = {1, 2, 3, 4}

Literaturhinweis: Frommenwiler ab Seite 73!

## 9.3 Wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Gleichungen

**Grundmenge G**

Menge aller Elemente, die in einer Aussageform anstelle der Variablen eingesetzt werden können. Wird zu einer Gleichung keine Grundmenge angegeben, so wird üblicherweise angenommen, dass sie gleich der Menge der reellen Zahlen ist: G = **R**.

**Definitionsmenge D**

Die Menge der erlaubten Einsetzungen für die Variablen eines Terms nennt man Definitionsmenge oder Definitionsbereich **D** des Terms. Stehen zum Beispiel Variablen im Nenner eines Bruchterms, so kann es vorkommen, dass beim Einsetzen von Zahlen für die Variablen der Nenner den Wert 0 annimmt. Der Nenner darf den Wert 0 nicht annehmen, weil die Division mit 0 nicht definiert ist!

Beispiele für die Bestimmung der Definitionsmenge D (G = **R**):

a. Nenner $\neq 0$ $\qquad \left(\text{d. h. } \frac{a}{x} \rightarrow x \neq 0\right)$

$\frac{4}{x} = \frac{5}{x+1} \qquad (G = \mathbb{R}) \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

b. Radikand einer Wurzel $\geq 0$ $\qquad \left(\text{d. h. } \sqrt[n]{x} \rightarrow x \geq 0\right)$

$\sqrt{4x - 12} = 4 \qquad (G = \mathbb{R}) \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

c. $\underbrace{\text{Argument}}_{\text{Numerus}}$ eines Logarithmus $> 0$ $\qquad \left(\text{d. h. } \log_a x \rightarrow x > 0\right)$

$\log_a x = 2 \qquad (G = \mathbb{R}) \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**Lösungsmenge L**

Aufgrund der Rechnung und der Definitionsmenge oder durch Überprüfung gefundene Menge aller Lösungen.

## 9.4 Begriff Gleichung

| |
|---|
| Werden zwei Terme gleichgesetzt, so entsteht eine Gleichung: $T_1 = T_2$ |

Gleichungen sind Aussagen mit Gleichheitszeichen.

**Beispiele**

$2 \cdot 3 = 6$ wahre Aussage
$2 + 3 = 6$ falsche Aussage

Bestimmungsgleichungen sind Aussageformen mit Gleichheitszeichen.

**Beispiele**

$x + 4 = 2x + 2$
$2x^2 = 27 + 3x$

**Einteilung der Gleichungen**

| | |
|---|---|
| $13 = 13$<br>$7 + 5 = 12$ | identische Gleichungen |
| $a + b = b + a$<br>$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ | allgemeingültige Gleichungen |
| $2x + 5 = 12$<br>$y - 2 = 18$ | Bestimmungsgleichungen |
| $5x - 2 > 10$<br>$2 + 8x \leq 2$ | Ungleichungen |
| $U = d \cdot \pi$<br>$v = s \cdot t$<br>$y = 5x + 7$<br>$R = l \cdot \rho \cdot A$ | Funktionsgleichungen |

**Hinweis**
Funktionsgleichungen stellen einen Zusammenhang zwischen veränderlichen Grössen (Variablen) dar. Es führen meistens unendlich viele Werte der veränderlichen Grösse, zu wahren Aussagen.

## 9.5 Grad der Gleichung

Gleichungen werden unterschieden nach dem Grad (Potenz) der Unbekannten!

### Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten (lineare Gleichungen)

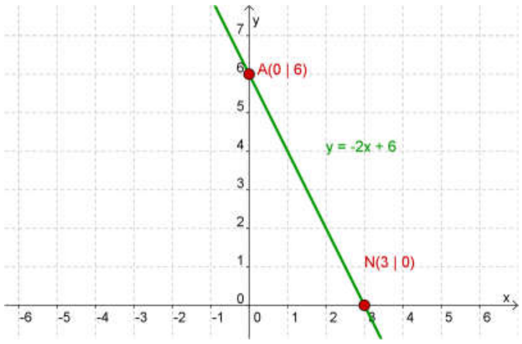
z. B. $9 - 2x = 3$

$9 - 2x - 3 = 0$ (Bestimmungsgleichung)

$6 - 2x = 0$ (Bestimmungsgleichung)

$\updownarrow$

$6 - 2x = y$ (Funktionsgleichung)




Merkmale: Die Unbekannte kommt maximal in der ersten Potenz vor.
Es gibt maximal 1 Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse).
x-Koordinate der Nullstelle ist Lösung der Bestimmungsgleichung!
(wenn $x = 3$ ist, dann ist $y = 0$)

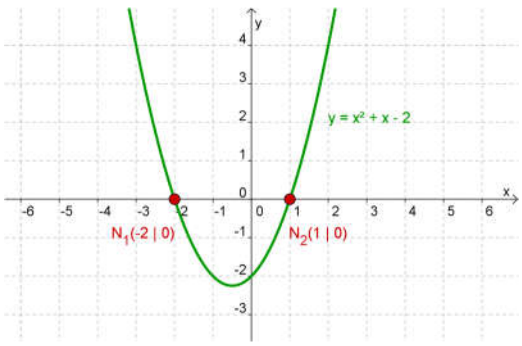
### Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten (quadratische Gleichungen)

z. B. $x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$ (Bestimmungsgleichung)

$\updownarrow$

$x^2 + x - 2 = y$ (Funktionsgleichung)




Merkmale: Die Unbekannte kommt maximal in der zweiten Potenz vor.
Es gibt maximal 2 Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse).
x-Koordinaten der Nullstellen sind Lösungen der Bestimmungsgleichung!
(wenn $x_1 = -2$ ist oder $x_2 = 1$ ist, dann ist $y = 0$)

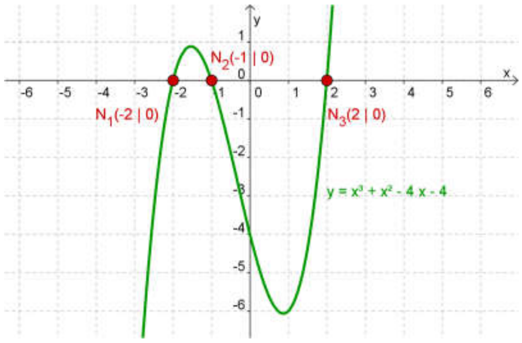
### Gleichungen 3. Grades mit einer Unbekannten (kubische Gleichungen)

z. B. $x^3 + x^2 = 4x + 4$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ (Bst. – Gleichung)

$\updownarrow$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = y$ (Fkt. – Gleichung)




Merkmale: Die Unbekannte kommt maximal in der dritten Potenz vor.
Es gibt maximal 3 Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse).
x-Koordinaten der Nullstellen sind Lösungen der Bestimmungsgleichung!
(wenn $x_1 = -2$ ist oder $x_2 = -1$ ist oder $x_3 = 2$ ist, dann ist $y = 0$)

## 9.6 Algebraische Gleichung bzw. transzendente Gleichungen

Man unterscheidet bei Bestimmungsgleichungen zwischen algebraischen und transzendenten Gleichungen. Gleichungen, die darin bestehen, eine Gleichung n-ten Grades gleich Null zu setzen, heissen **algebraische Gleichungen**.
Für **transzendente** Gleichungen gibt es im Allgemeinen keine systematischen Lösungswege. Sie sind oft nur numerisch oder grafisch lösbar.

### Beispiele von algebraischen Gleichungen

a. $8x + 5 = 24$ — Gleichung 1. Grades (lineare Gleichung)
b. $x^2 - 4x = 45$ — Gleichung 2. Grades (quadratische Gleichung)
c. $x^n + 2x^{n-1} - 3x^{n-2} + \ldots + 7x - 5 = 0$ — Gleichung n-ten Grades
d. $\sqrt{2x + 3} = \sqrt{2x^2 + x - 1}$ — Wurzelgleichung (Unbekannte unter der Wurzel)

### Beispiele von transzendenten Gleichungen

a. $e^x + e^{2x} = 2$ — Exponentialgleichung
b. $\ln(2x) + \ln(x) = 4$ — logarithmische Gleichung
c. $\sin(x) - \cos(x) = 0.5$ — goniometrische Gleichung

## 9.7 Teilgültige Gleichungen

Gehört zur Lösungsmenge wenigstens ein Element, aber nicht alle Elemente der Grundmenge, so ist die Gleichung bzw. Ungleichung **teilgültig**.

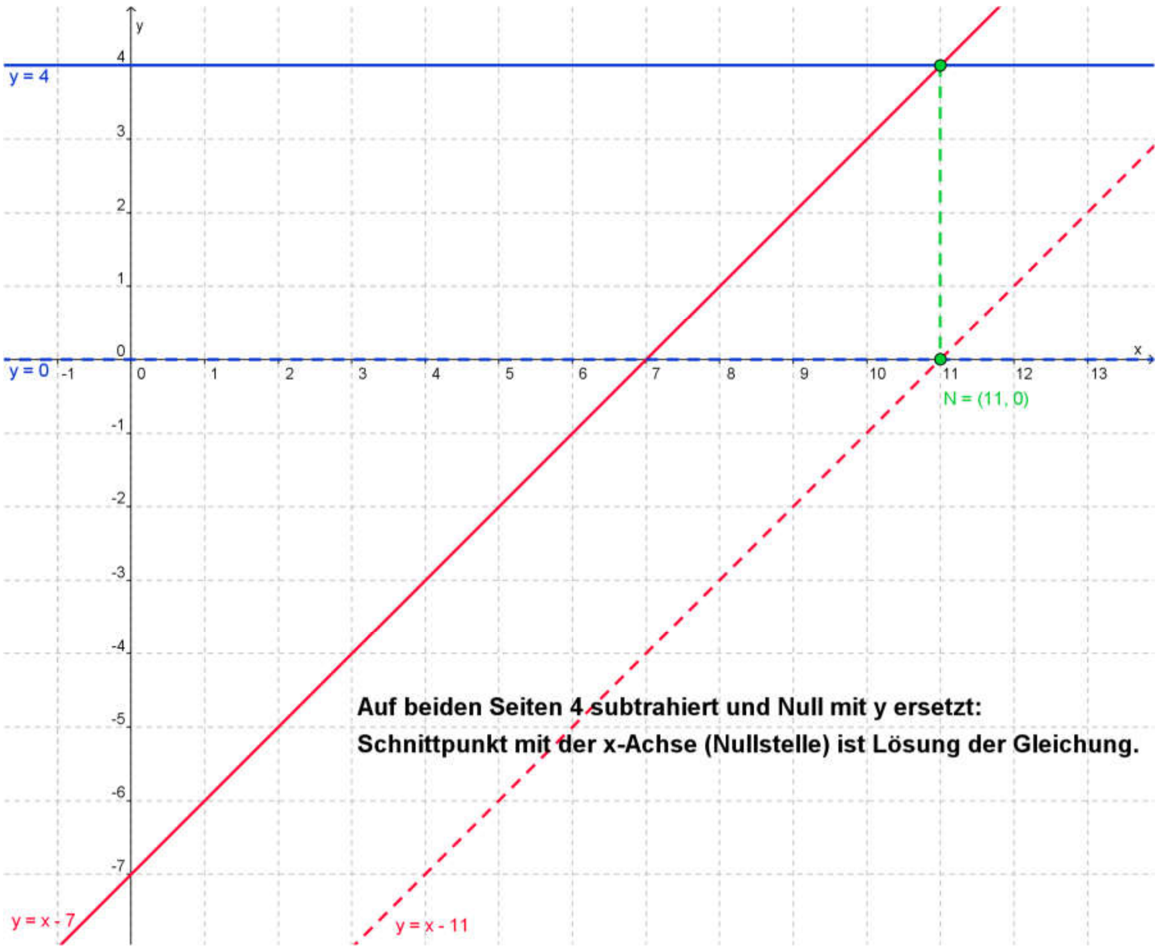
Beispiel: $x - 7 = 4$ $(G = \mathbb{R})$

Lösung: $D = \mathbb{R}$ (keine Einschränkungen der Definitionsmenge)

$x = 4 + 7 = \underline{11}$

$L = \underline{\underline{\{11\}}}$

Geometrische Interpretation: Schnittpunkt von zwei Geraden




Hinweis
Die gestrichelten Geraden erhält man nach der Subtraktion von 4 auf beiden Seiten!

## 9.8 Allgemeingültige Gleichungen

Gehören zur Lösungsmenge **alle Elemente** der Grundmenge, so ist die Gleichung bzw. Ungleichung **allgemeingültig**.

Beispiel: $4x + 2x = 7x - x$ $\quad G = \mathbb{R}$

Lösung: $D = \mathbb{R}$ (keine Einschränkungen der Definitionsmenge)

$\underbrace{6x}_{y_1} = \underbrace{6x}_{y_2}$ (zwei deckungsgleiche Geraden $y_1 = y_2$)

oder $0 = 0$ (wahre Aussage)

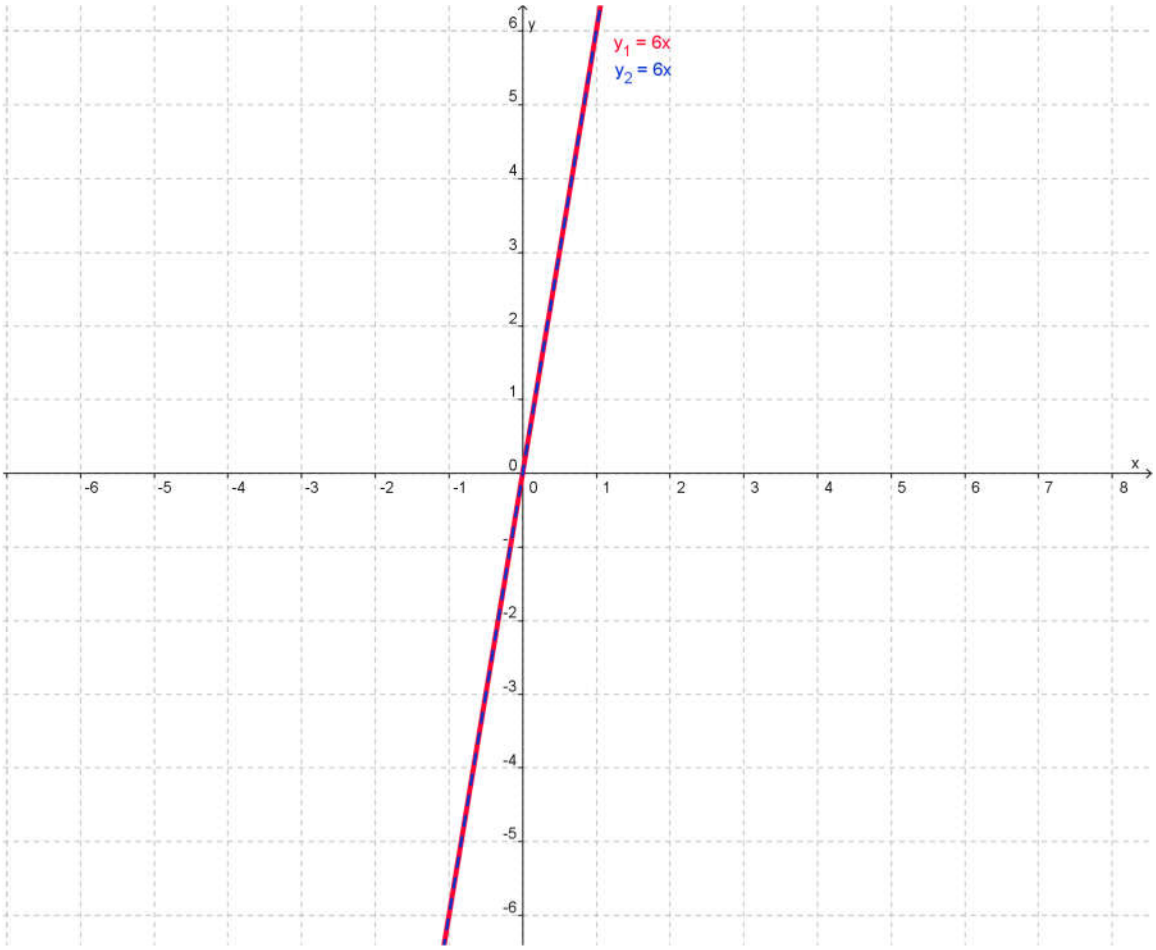
oder $6x - 6x = 0$

$x \cdot \underbrace{(6-6)}_{0} = 0$ Für x können alle Zahlen aus D eingesetzt werden.

$L = \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

Steht auf beiden Seiten des Zeichens = derselbe Wert, so entspricht die Lösungsmenge der Definitionsmenge (hier $\mathbb{R}$).

Geometrische Interpretation: Zwei deckungsgleiche Geraden $y_1 = y_2 = 6x$



## 9.9 Unlösbare Gleichungen

Gibt es kein Element der Grundmenge, das die Aussageform zu einer wahren Aussage macht, so ist die Gleichung bzw. Ungleichung **unlösbar**.

Beispiel: $\frac{2x}{4}-\frac{3x}{6}=5 \qquad (G=\mathbb{R})$

Lösung: $D=\mathbb{R}$ (keine Einschränkungen der Definitionsmenge)

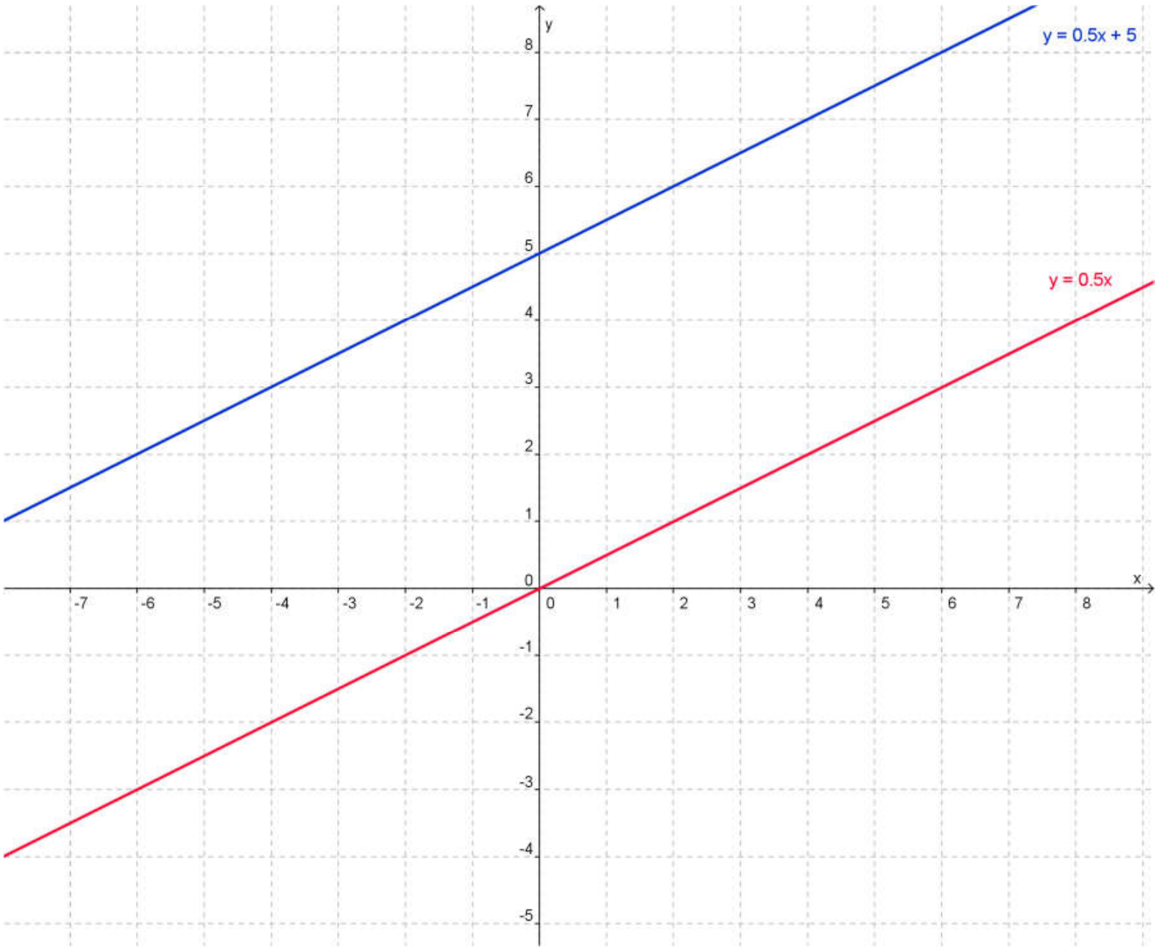
$\frac{\cancel{2}^{1}x}{\cancel{4}_{2}}-\frac{\cancel{3}^{1}x}{\cancel{6}_{2}}=5 \qquad |\text{kürzen}$

$\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=5 \qquad |\text{vereinfachen}$

$0=5 \qquad |\text{falsche Aussage}$

$L=\underline{\underline{\{\ \}}}$

Geometrische Interpretation: Zwei parallele Geraden $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+5$



## 9.10 Äquivalenzumformungen

Man spricht von einer Äquivalenzumformung, wenn eine Bestimmungsgleichung in eine andere Bestimmungsgleichung umgeformt wird, ohne dass sich dabei die Lösungsmenge der Gleichung verändert.

**Äquivalenzumformungen sind:**

1. Addieren oder subtrahieren einer Zahl a $(a \in \mathbb{R})$ auf beiden Seiten einer Gleichung.
2. Multiplizieren mit einer Zahl a $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ auf beiden Seiten einer Gleichung.
3. Dividieren mit einer Zahl a $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ auf beiden Seiten einer Gleichung.

## 9.11 Einfache Zahlengleichungen lösen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung (G = $\mathbb{R}$):
$5x + 3 = 18$

1. Definitionsbereich D bestimmen (Hauptnenner $\neq 0$):
   Lösungsvariable x steht nicht im Nenner, somit: $D = \mathbb{R}$

2. Glieder ordnen, Terme mit x links, alle anderen Terme rechts anordnen:
   $5x + 3 = 18 \qquad | -3$
   $5x + 3 - 3 = 18 - 3$

3. zusammenfassen:
   $5x = 15$

4. Unbekannte x isolieren:
   $5x = 15 \qquad | :5$
   $\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$
   $x = \underline{3} \in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:
   $\underbrace{5 \cdot 3 + 3}_{18} = 18 \quad \rightarrow$ Lösung ist korrekt!
   Hinweis: Werte einsetzen, Berechnung darf mit dem Taschenrechner erfolgen!

6. Lösungsmenge:
   $L = \underline{\underline{\{3\}}}$

### Beispiele

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. Kontrolle mit TI!
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $2x - 22 - 9x = 42 + 11x - 100$

2. $18 - 7x = 20 - 5x + 12$

## 9.12 Gleichungen mit der Unbekannten in Klammern

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung (G = $\mathbb{R}$):

$15(x-3)+12(x+1)=21$

1. Definitionsbereich D bestimmen (Hauptnenner $\neq 0$):
   Lösungsvariable x steht nicht im Nenner, somit: $D=\mathbb{R}$

2. Klammern auflösen:
   $15x-45+12x+12=21$

3. Glieder ordnen, Terme mit x links, alle anderen Terme rechts anordnen:
   $15x-45+12x+12=21 \qquad |+45 \quad |-12$
   $15x+12x=21+45-12$

4. zusammenfassen:
   $27x=54$

5. Unbekannte x isolieren:
   $27x=54 \qquad |:27$
   $\frac{27x}{27}=\frac{54}{27}$
   $x=\underline{2}\in D$

6. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:
   $\underbrace{15(2-3)+12(2+1)}_{21}=21 \quad \rightarrow$ Lösung ist korrekt!
   Hinweis: Werte einsetzen, Berechnung darf mit dem Taschenrechner erfolgen!

7. Lösungsmenge:
   $L=\underline{\underline{\{2\}}}$

**Beispiele**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. Kontrolle mit TI!
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $16(x+1)-2(x-1)=15-3(2x-1)$

2. $8x-[3x+(4-x)]=4x+8$

## 9.13 Zahlengleichungen mit Brüchen (Unbekannte nicht im Nenner)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung ($G = \mathbb{R}$):

$$\frac{2x-6}{3}-\frac{2x-4}{5}=\frac{1}{15}$$

1. Definitionsbereich D bestimmen (Hauptnenner $\neq 0$):
   Lösungsvariable x steht nicht im Nenner, somit: $D = \mathbb{R}$

2. Brüche wegschaffen (gleichnamig machen bzw. mit dem Hauptnenner multiplizieren):
   $$\frac{2x-6}{3}\cdot\frac{5}{5}-\frac{2x-4}{5}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{15} \qquad |\text{unbedingt mit dem kgV arbeiten}$$
   $$\frac{5(2x-6)}{15}-\frac{3(2x-4)}{15}=\frac{1}{15} \qquad |\cdot 15$$
   $$5(2x-6)-3(2x-4)=1$$

3. Klammer auflösen:
   $$10x-30-6x+12=1$$

4. Glieder ordnen, Terme mit x links, alle anderen Terme rechst anordnen:
   $$10x-30-6x+12=1 \qquad |+30 \quad |-12$$
   $$10x-6x=1+30-12$$

5. zusammenfassen:
   $$4x=19$$

6. Unbekannte x isolieren:
   $$4x=19 \qquad |:4$$
   $$\underline{x=\frac{19}{4}}\in D$$

7. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:
   $$\underbrace{\frac{2\cdot\frac{19}{4}-6}{3}-\frac{2\cdot\frac{19}{4}-4}{5}}_{\frac{1}{15}}=\frac{1}{15} \quad\rightarrow\quad \text{Lösung ist korrekt!}$$
   Hinweis: Werte einsetzen, Berechnung darf mit dem Taschenrechner erfolgen!

8. Lösungsmenge:
   $$L=\underline{\underline{\left\{\frac{19}{4}\right\}}}$$

**Beispiele**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. Kontrolle mit TI!
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $\frac{2x}{3} - 4 = \frac{x}{3} + 6$

2. $\frac{x+1}{5} + \frac{x-1}{4} + 1 = \frac{3x+3}{6}$

## 9.14 Fehlende oder zusätzliche Lösungen

Bei folgenden Umformungen einer Gleichung können Lösungen verlorengehen oder scheinbare Lösungen hinzukommen (keine Äquivalenzumformungen):

1. Wenn beide Seiten der Gleichung mit einem Term multipliziert oder dividiert werden, der die Variable enthält.
2. Wenn man auf beiden Seiten einen Term addiert oder subtrahiert, der die Variable im Nenner enthält.

Beispiel 1 ($G = \mathbb{R}$)

$x^2 = 4x \qquad x = ? \qquad$ (ursprüngliche Gleichung)

$D = \mathbb{R}$

$x^2 = 4x \qquad |:x$

$x = 4$

Bei der Division mit x ist die Lösung x = 0 verloren gegangen. Deshalb muss bei der Division durch eine Variable immer berücksichtigt werden, dass eine Lösung verloren gehen kann (aber nicht muss).

Um dieses Problem zu umgehen, soll, wenn immer möglich, ausgeklammert werden:

$D = \mathbb{R}$

$x^2 = 4x \qquad |$Gleichung 0 setzen

$x^2 - 4x = 0 \qquad |$x ausklammern

$x(x-4) = 0 \qquad |$Lösungen bestimmen

$L = \underline{\underline{\{0,\ 4\}}}$

Beispiel 2 ($G = \mathbb{R}$)

$\frac{x^2}{x} - 11 = 0 \qquad x = ? \qquad$ (ursprüngliche Gleichung)

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad$ x darf nicht 0 sein (für x = 0 ist die Gleichung nicht definiert)

$\frac{x^2}{x} - 11 = 0 \qquad |+11$

$\frac{x^2}{x} = 11 \qquad |\cdot x$

$x^2 = 11x \qquad |-11x$

$x^2 - 11x = 0 \qquad |$faktorisieren

$x(x-11) = 0 \qquad |$durch die Multiplikation mit x ist eine ungültige Lösung entstanden

$x_1 = \underline{0} \notin D \quad$ und $\quad x_2 = 11 \in D$

$L = \underline{\underline{\{11\}}}$

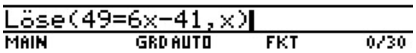
## 9.15 Gleichungen mit dem TI lösen

Mit der Taste [F2] und 1:Löse() lassen sich viele Gleichungen lösen. Die Funktion Löse() zeigt aber den Lösungsweg nicht an. Es kann sogar vorkommen, dass die Funktion falsche Resultate anzeigt.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit der Funktion Löse() nach x auf.
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

**Beispiel 1** $49 = 6x - 41$ $D = \mathbb{R}$

Eingabe:


Ergebnis:

Somit: Die Gleichung ist ..........................................................

**Beispiel 2** $5(3+x)+7x = 12x+15$ $D = \mathbb{R}$

Eingabe:

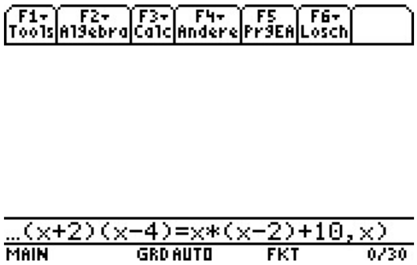


Ergebnis:

Somit: Die Gleichung ist ..........................................................

**Beispiel 3** $(x+2)(x-4)=x(x-2)+10$ $D=\mathbb{R}$

Eingabe:

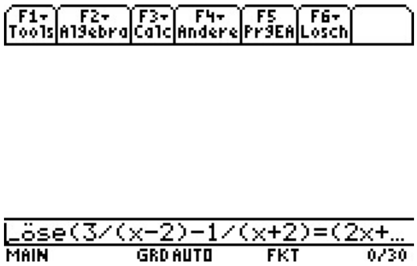


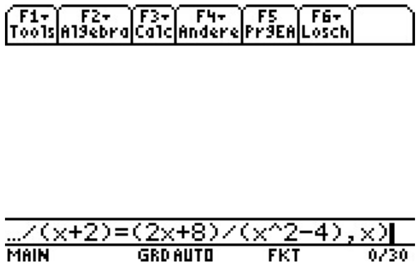

Ergebnis:

Somit: Die Gleichung ist ...............................................................

**Beispiel 4** $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x+8}{x^2-4}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

Eingabe:




Achtung: Die Definitionslücke wird ........... erkannt!

Ergebnis:

Somit: Die Gleichung ist ...............................................................

**Hinweis**
Der TI kann Gleichungen genauso lösen, wie wir «von Hand».
Das Vorgehen ist im Skript **«Lineare Gleichungen»** von Hans Berger erklärt.

## 9.16 Bruchgleichungen (Unbekannte kommt im Nenner vor)

Bei Bruchgleichungen kommen die Variablen auch im Nenner vor. Stehen Variablen im Nenner eines Bruchterms, so kann es vorkommen, dass beim Einsetzen von Zahlen für die Variablen der Nenner den Wert 0 annimmt. Weil die Division durch 0 nicht definiert ist, gehören diese Zahlen **nicht zum Definitionsbereich des Terms**.

### Vorgehensweise anhand eines Beispiels

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung (G = $\mathbb{R}$):

$$\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$$

1. Definitionsbereich D bestimmen (Hauptnenner $\neq 0$):

$$\left.\begin{array}{l} x+1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \underline{x\neq -1} \\ x-1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \underline{x\neq 1} \end{array}\right\}\ \text{Nenner} \neq 0\text{, da Division durch Null nicht erlaubt ist!}$$

   somit: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}$

2. Gleichnamig machen oder Multiplikation mit Hauptnenner:

$$\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}=\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1} \qquad \rightarrow \quad x-1=2(x+1)$$

   oder

$$\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)\cdot(x-1)=\frac{2}{x-1}\cdot(x+1)\cdot(x-1) \quad\rightarrow\quad x-1=2(x+1)$$

3. Lösung(en) der Gleichung bestimmen:

$$x-1=2(x+1)$$
$$x-1=2x+2$$
$$x=\underline{-3}\in D$$

4. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:

$$\frac{1}{\underbrace{-3+1}_{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\underbrace{-3-1}_{-\frac{1}{2}}} \quad\rightarrow\quad \text{Lösung ist korrekt!}$$

   Hinweis: Werte einsetzen, Berechnung darf mit dem Taschenrechner erfolgen!

5. Lösungsmenge:

$$L=\underline{\underline{\{-3\}}}$$

**Beispiele**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. Kontrolle mit TI!
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $\frac{x-1}{3-x}=\frac{1-6x}{6x-3}$ $\qquad x=?$

2. $\frac{x-1}{3-x}-\frac{2-6x}{6x-3}=0$ $\qquad x=?$

3. $\dfrac{\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{4}}{\dfrac{x}{6}}=1$ $x=?$

## 9.17 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

| Nummer | Seite | Bemerkungen |
|---|---|---|
| 324 (alle) | 106 | Kontrolle mit TI üben |
| 325 (alle) | 106 | Kontrolle mit TI üben |
| 326 (alle) | 107 | Kontrolle mit TI üben |

## 9.18 Gleichungen mit Formvariablen (Parameter)

### Die Unterscheidung von Lösungsvariablen und Formvariablen

In der Technik haben wir es häufig mit Formeln zu tun, die die Zusammenhänge irgendwelcher physikalischer oder technischer Grössen beschreiben. Es sind Gleichungen oder Aussageformen mit verschiedenen Variablen. Diejenige Variable, die in Abhängigkeit der übrigen Variablen berechnet werden soll, nennt man Lösungsvariable, die übrigen Variablen sind Formvariablen. Grundsätzlich kann jede Variable Lösungsvariable werden.

Wenn die Gleichung x + a = b nach x aufgelöst werden soll, bezeichnet man x als Lösungsvariable und die Variablen a und b als Formvariablen der Gleichung.

Beispiel 1: $v \cdot t = s$ $\quad v = ?$ $\quad v:$ Lösungsvariable, $s$ und $t:$ Formvariablen

Beispiel 2: $R_g(R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2$ $\quad R_g = ?$ $\quad R_g:$ Lösungsvariable, $R_1$ und $R_2:$ Formvariablen

### Den Lösungsterm einer Gleichung mit Formvariablen bestimmen

Eine Gleichung mit Formvariablen darf umgeformt werden wie eine gewöhnliche Gleichung. Als Lösung einer Gleichung mit Formvariablen erhalten wir nicht eine Zahl, sondern einen Term, der Formvariablen enthält. So hat zum Beispiel die Gleichung x – a = 2 den Lösungsterm a + 2.
Welche Zahlen man für a in den Lösungsterm einsetzen kann, hängt von dem gegebenen Grundbereich ab. Wollen wir zum Beispiel für a nur Zahlen aus **N** einsetzen, so ist der Definitionsbereich des Lösungsterms D = **N**. Als Definitionsbereich D bezeichnet man die Menge derjenigen Zahlen des Grundbereiches, die den Term in eine Zahl überführen.

### Fallunterscheidungen (Vertiefung)

Bei der Bearbeitung von Gleichungen mit Formvariablen müssen wir genau untersuchen, welche Zahlen wir für die Variablen aus dem gegebenen Grundbereich einsetzen können. Sind die Formvariablen mit der Lösungsvariablen multiplikativ verknüpft, so müssen wir sogar mehrere Fälle unterscheiden. Beispiel: ax – b = 0, G = **Z**, x ist die Lösungsvariable

**1. Fall:** $a \neq 0$ und $b \neq 0 \quad \rightarrow \quad ax = b \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$

Um Lösungen in der Menge **Z** zu ermöglichen, muss a Teiler von b sein.

**2. Fall:** $a \neq 0$ und $b = 0 \quad \rightarrow \quad ax = b \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a} = \frac{0}{a} = 0$

Der Lösungsterm geht für alle a in 0 über. $L = \{0\}$.

**3. Fall:** $a = 0$ und $b \neq 0 \quad \rightarrow \quad ax - b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 \cdot x - b = 0$

Da man für b keine von 0 verschiedene Zahl einsetzen kann,

ist die Gleichung unlösbar. $L = \{\ \}$. (Division durch Null beim Auflösen nach x)

**4. Fall:** $a = 0$ und $b = 0 \quad \rightarrow \quad ax - b = 0 \quad \rightarrow \quad 0 \cdot x - 0 = 0$

Für x können alle Zahlen aus **Z** eingesetzt werden.

Die Gleichung ist allgemeingültig. $L = \{\mathbb{Z}\}$.

Obwohl im Allgemeinen der 1. Fall am wichtigsten ist, muss man daran denken, dass auch die drei anderen Fälle auftreten können. Zur vollständigen Bearbeitung einer Gleichung mit Formvariablen sind also oft mehrere Fallunterscheidungen erforderlich, die zu längeren Berechnungen führen können.

Wir beschränken uns auf das Erlernen der Rechentechnik zur Bestimmung des Lösungsterms. Wir wollen aber die Bedingungen untersuchen, die gelten müssen, damit **1. die Nenner der Aufgabe nicht 0 werden und 2. bei den Äquivalenzumformungen nicht durch 0 dividiert oder mit 0 multipliziert wird.**

Beispiel

Berechnen Sie den Lösungsterm der Gleichung $\frac{x-b}{a}+\frac{x-a}{b}=2$. G = $\mathbb{R}$

$D=\mathbb{R}$

$$
\begin{array}{lll}
\frac{x-b}{a}+\frac{x-a}{b}=2 & |\cdot ab & a\neq 0 \quad \wedge \quad b\neq 0 \\
b(x-b)+a(x-a)=2ab & & \\
bx-b^2+ax-a^2=2ab & |\text{alle Terme mit x isolieren} & \\
ax+bx=a^2+2ab+b^2 & |\text{faktorisieren} & \\
x(a+b)=(a+b)^2 & |:(a+b) & a+b\neq 0 \quad \rightarrow \quad a\neq -b \\
x=\frac{(a+b)^2}{a+b}=\underline{a+b} & &
\end{array}
$$

$$
\underline{\underline{L=\{x|x=a+b\}}} \qquad a\neq 0 \quad \wedge \quad b\neq 0 \quad \wedge \quad a\neq -b
$$

Fazit: **Während der Berechnung können zusätzliche Einschränkungen entstehen.**
Da **mehrere Lösungen** möglich sind, wird die Lösungsmenge wie folgt festgehalten:

$$
L=\left\{ \underbrace{x}_{\substack{\text{ist die Menge} \\ \text{aller x, für die gilt:}}} \middle| \underbrace{x=\ldots}_{\text{x gleich …}} \right\}
$$

### Beispiele

Bestimmen Sie den Lösungsterm und stellen Sie fest, welche Bedingungen gelten müssen, damit die Nenner der Aufgabe nicht 0 werden und damit bei den Äquivalenzumformungen nicht durch 0 dividiert oder mit 0 multipliziert wird! Kontrolle mit TI!
Für alle Aufgaben gilt G = **R**.

1. $\frac{x+a}{x-b} = \frac{x-a}{x+b}$ $x = ?$

2. $\frac{x-a}{a-b} + \frac{x-2b}{a+b} = \frac{a^2+ab+2b^2}{a^2-b^2}$ $x = ?$

3. $\dfrac{b(2a+b)}{a^2x^2-b^2}+\dfrac{b}{ax+b}=\dfrac{a}{ax-b}$ $x=?$

4. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{ab}{x^2-a^2}=\dfrac{bx-a^2}{a(x+a)}$ $x=?$

## 9.19 Wurzelgleichungen

**Einführung**

Bei Wurzelgleichungen kommt die Unbekannte unter einer Wurzel vor. Wurzelgleichungen können mittels einfacher Umformungen in bereits bekannte Gleichungstypen überführt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass für die Isolation der Lösungsvariablen **nicht äquivalente Umformungen** durchgeführt werden. Bei nicht äquivalenten Umformungen der Gleichungen können **zusätzliche Lösungen** auftreten, die die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen. Solche Scheinlösungen können durch Einsetzen in der ursprünglichen Gleichung entlarvt werden.

**Beispiel 1**

Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{6x+7}-5=0$ nach x auf. G = **R**.

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikand $\geq$ 0

   $6x+7\geq 0 \rightarrow 6x\geq -7 \rightarrow x\geq -\frac{7}{6}$

   somit:
   $$\left.\begin{array}{l} D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq -\frac{7}{6}\right\} \\ D=\left\{x\,\middle|\,x\geq -\frac{7}{6}\right\}_{\mathbb{R}} \\ D=\mathbb{R}\setminus\left\{x\,\middle|\,x< -\frac{7}{6}\right\} \end{array}\right\}$$
   Verschiedene Möglichkeiten D anzugeben!

2. Separation der Wurzel:

   $\sqrt{6x+7}=5$

3. Gleichung quadrieren:

   $6x+7=25$

4. Resultierende Gleichung nach x auflösen:

   $6x=18$

   $x=\underline{3}\in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:

   $\sqrt{6\cdot 3+7}-5=\sqrt{25}-5=5-5=0 \quad (\mathrm{w})$

6. Lösungsmenge:

   $L=\underline{\underline{\{3\}}}$

Beispiel 2

Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{6x+7}+5=0$ nach x auf. G = **R.**

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikand $\geq$ 0

   $6x+7\geq 0 \rightarrow 6x\geq -7 \rightarrow x\geq -\frac{7}{6}$

   somit:

   $$\left.\begin{array}{l} D=\left\{x\in \mathbb{R}\,\middle|\,x\geq -\frac{7}{6}\right\} \\ D=\left\{x\,\middle|\,x\geq -\frac{7}{6}\right\}_{\mathbb{R}} \\ D=\mathbb{R}\setminus\left\{x\,\middle|\,x< -\frac{7}{6}\right\} \end{array}\right\}$$ Verschiedene Möglichkeiten D anzugeben!

2. Separation der Wurzel:

   $\sqrt{6x+7}=-5$

3. Gleichung quadrieren:

   $6x+7=25$

4. Resultierende Gleichung nach x auflösen:

   $6x=18$

   $x=\underline{3}\in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:

   $\sqrt{6\cdot 3+7}+5=\sqrt{25}+5=5+5=10\neq 0 \quad (f)$

6. Lösungsmenge:

   $L=\underline{\underline{\{\ \}}}$

Kommentar

Obschon sich die Wurzelgleichungen der Beispiele eins und zwei nur durch ein Vorzeichen unterscheiden, ergeben sich nach dem Quadrieren dieselben potentiellen Lösungselemente. Erst durch Einsetzen in der ursprünglichen Gleichung kann im zweiten Beispiel die potentielle Lösung als **Scheinlösung** entlarvt werden.

**Lösungsverfahren für Wurzelgleichungen**

1. Definitionsbereich der Gleichung festlegen (u. a. sind die Werte auszuschliessen, für die unter einer Wurzel stehenden Terme negativ werden → Radikand ≥ 0).

2. Separation der Wurzel. Wird die Gleichung quadriert, **ohne vorher die Wurzel zu separieren, so bleibt der Wurzelterm erhalten.** Die Wurzelgleichung wird dadurch nur komplizierter. Deshalb wann immer möglich **vor dem Quadrieren die Wurzel separieren**!

   Beispiel: Quadrieren ohne Separation

   $\sqrt{6x+7}-5=0 \qquad \left|\,(\;)^2\right.$

   $\underbrace{\left(\sqrt{6x+7}-5\right)^2}_{\text{Binom}}=0$

   $6x+7-2\cdot 5\sqrt{6x+7}+25=0$

   $6x-10\sqrt{6x+7}+32=0$ Die Gleichung ist **komplizierter** geworden.

3. Beide Seiten der Gleichung werden quadriert. Das beidseitige Quadrieren ist keine äquivalente Umformung. Durch diesen Schritt können zusätzliche Lösungen entstehen.
   Bei einigen Wurzelgleichungen, die **zwei** Wurzelterme enthalten, ist ein **wiederholtes Quadrieren notwendig**.

   **Achtung:** Nach jedem Quadrieren muss die Separation der Wurzel vor dem erneuten Quadrieren durchgeführt werden!

4. Nachdem alle Wurzelterme eliminiert sind, wird die resultierende Gleichung gelöst.

5. Kontrolle durch Einsetzen der ermittelten Lösungen in die ursprüngliche Gleichung.
   **Um Scheinlösungen auszuschliessen, muss bei Wurzelgleichungen unbedingt die Kontrolle mit der ursprünglichen Gleichung durchgeführt werden.**

6. Lösungsmenge festlegen.

### Beispiel 3

Lösen Sie die Wurzelgleichung $4\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x+6}$ nach x auf. G = **R**.

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikanden $\geq$ 0
   $x-1 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 1}$ und $x+6 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq -6}$
   Durchschnitt von $x \geq 1$ **und** $x \geq -6$ ergibt den Definitionsbereich!
   $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ oder $D = \mathbb{R} \setminus \{x | x < 1\}$

2. Separation der Wurzel ist hier bereits gegeben!

3. Gleichung quadrieren:
   $16(x-1) = 9(x+6)$

4. Resultierende Gleichung nach x auflösen:
   $16x - 16 = 9x + 54$
   $7x = 70$
   $x = \underline{10} \in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:
   $4\sqrt{10-1} = 3\sqrt{10+6}$
   $4\sqrt{9} = 3\sqrt{16}$
   $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \quad (w)$

6. Lösungsmenge:
   $L = \underline{\underline{\{10\}}}$

### Beispiel 4

Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{2-x} + \sqrt{4x-24} = 3$ nach x auf. G = **R**.

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikanden $\geq$ 0
   $2-x \geq 0 \rightarrow \underline{x \leq 2}$ und $4x-24 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 6}$
   Durchschnitt von $x \leq 1$ **und** $x \geq 6$ ergibt den Definitionsbereich!
   $D = \{\ \}$ Es gibt keine Zahl aus der Grundmenge, die beide Bedingungen erfüllt!

2. Lösungsmenge
   $L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

**Beispiel 5**

Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=1$ nach x auf. G = **R**.

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikanden $\geq$ 0

   $x-1 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq 1}$ und $x+2 \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq -2}$

   Durchschnitt von $x \geq 1$ **und** $x \geq -2$ ergibt den Definitionsbereich!

   $D = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 1\}$ oder $D = \mathbf{R} \setminus \{x | x < 1\}$

2. Separation der Wurzel:

   $\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{x+2}$

3. Gleichung quadrieren:

   $x-1 = 1 - 2\sqrt{x+2} + x + 2$

4. Separation der Wurzel:

   $x-1-1-x-2 = -2\sqrt{x+2}$

   $-4 = -2\sqrt{x+2}$

   $2 = \sqrt{x+2}$

5. Gleichung quadrieren:

   $4 = x+2$

6. Resultierende Gleichung nach x auflösen:

   $x = \underline{2} \in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:

   $\sqrt{2-1} + \sqrt{2+2} = 1$

   $\sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3 \neq 1 \quad (f)$

6. Lösungsmenge:

   $L = \underline{\underline{\{\ \}}}$

Beispiel 6

Lösen Sie die Wurzelgleichung $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$ nach x auf. G = **R**.

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikanden $\geq 0$

   $4x+1\geq 0 \rightarrow \underline{x\geq -\frac{1}{4}}$ und $x+3\geq 0 \rightarrow \underline{x\geq -3}$ und $x-2\geq 0 \rightarrow \underline{x\geq 2}$

   Durchschnitt von $x\geq -\frac{1}{4}$ **und** $x\geq -3$ **und** $x\geq 2$ ergibt den Definitionsbereich!

   $D=\{x\in \mathbb{R} | x\geq 2\}$ oder $D=\mathbb{R}\setminus\{x | x<2\}$

2. Separation der Wurzel geht hier zunächst nicht!

3. Gleichung quadrieren:

   $(4x+1)-2\sqrt{(4x+1)(x+3)}+(x+3)=x-2$

4. Separation der Wurzel:

   $-2\sqrt{(4x+1)(x+3)}=x-2-4x-1-x-3$

   $-2\sqrt{(\ )(\ )}=-4x-6=-2(2x+3)$

   $\sqrt{(\ )(\ )}=2x+3$

5. Gleichung quadrieren:

   $(4x+1)(x+3)=4x^2+12x+9$

6. Resultierende Gleichung nach x auflösen:

   $\cancel{4x^2}\ \cancel{+12x}+x+3=\cancel{4x^2}\ \cancel{+12x}+9$

   $x=\underline{6}\in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:

   $\sqrt{4\cdot 6+1}-\sqrt{6+3}=\sqrt{6-2}$

   $\sqrt{25}-\sqrt{9}=\sqrt{4}$

   $5-3=2$

   $2=2 \quad (w)$

6. Lösungsmenge:

   $L=\underline{\underline{\{6\}}}$

## Beispiel 7

Lösen Sie die Wurzelgleichung $\frac{5}{\sqrt{x+3}} - \sqrt{x+3} = \sqrt{x-1}$ nach x auf. G = R.

1. Definitionsbereich bestimmen: Radikanden $\geq$ 0 und Nenner $\neq 0$

   $x+3>0 \rightarrow \underline{x>-3}$ und $x-1\geq 0 \rightarrow \underline{x\geq 1}$

   Durchschnitt von $x>-3$ **und** $x\geq 1$ ergibt den Definitionsbereich!

   $D=\{x\in R|x\geq 1\}$ oder $D=R\setminus\{x|x<1\}$

2. Bruch entfernen $\rightarrow$ Multiplikation mit $\sqrt{x+3}$

   $5-(x+3)=\sqrt{(x-1)(x+3)}$

   $2-x=\sqrt{(x-1)(x+3)}$

3. Gleichung quadrieren:

   $4-4x+x^2=(x-1)(x+3)$

6. Resultierende Gleichung nach x auflösen:

   $4-4x+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+3x-x-3$

   $-4x-3x+x=-3-4$

   $-6x=-7$

   $x=\frac{-7}{-6}=\underline{\frac{7}{6}}\in D$

5. Kontrolle durch Einsetzen in die **ursprüngliche** Gleichung:

   $$\frac{5}{\sqrt{\frac{7}{6}+3}}-\sqrt{\frac{7}{6}+3}=\sqrt{\frac{7}{6}-1}$$

   $$\frac{5}{\sqrt{\frac{25}{6}}}-\sqrt{\frac{25}{6}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

   $$\underbrace{\frac{5}{\frac{5}{\sqrt{6}}}-\frac{5}{\sqrt{6}}}_{0.408}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{0.408} \qquad |\cdot\sqrt{6}$$

   (w)

6. Lösungsmenge:

   $L=\underline{\underline{\left\{\frac{7}{6}\right\}}}$

## 9.20 Angewandte Aufgabe

**Anwendung (Beispiel Marthaler auf Seite 216)**
Taucht vom Ausguck in der Mastspitze von Schiff 1 aus die Mastspitze von Schiff 2 gerade über dem Horizont auf, dann gilt für die Entfernung s zwischen den beiden Schiffen näherungsweise folgende Formel:

$$s = \sqrt{2rh_1} + \sqrt{2rh_2}$$

$h_1$, $h_2$: Masthöhen der beiden Schiffe in Metern über Meer
r: Erdradius, $r = 6370\,\text{km}$

Berechnen Sie:

a. Von der Mastspitze von Schiff 1 aus mit $h_1 = 10$ m, erscheint die Mastspitze des Schiffes 2 in einer Entfernung von s = 21 km.
Wie hoch ragt die Mastspitze $h_2$ von Schiff 2 über den Meeresspiegel?

Lösung: 7.40 m

b. Leiten Sie die Formel für die exakte Berechnung der Entfernung s her.
Begründen Sie, weshalb die Näherung genügend genaue Resultate liefert.

## 9.21 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

| Nummer | Seite | Bemerkungen |
|---|---|---|
| 339 (a, b, c, d und e) | 112 | Kontrolle mit TI üben |
| 340 (alle) | 112 | Kontrolle mit TI üben |
| 341 (b, c, e und f) | 112 | Kontrolle mit TI üben |
| 342 (a, b, c, d und f) | 112 | Kontrolle mit TI üben |
| 343 (a und b) | 113 | Kontrolle mit TI üben |
| 344 (a, b und f) | 113 | Kontrolle mit TI üben |
| 348 (a und b) | 113 | Kontrolle mit TI üben |