

4 Rationale Zahlen

4.1 Einführung

Die Gleichung $3 \cdot x = 9$ hat die Lösung 3.
 $3 \in \mathbf{Z}$

$$3 \cdot x = 9$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

Die Gleichung $3 \cdot x = 1$ hat die Lösung $\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$$

$$3 \cdot x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Definition

Die Gleichung $b \cdot x = a$, mit $a, b \in \mathbf{Z}$ und $b \neq 0$, hat die Lösung:

$$b \cdot x = a$$

$$x = \frac{a}{b} = a \div b$$

Ist a kein Vielfaches von b , so entsteht eine neue Zahl, *Bruch* oder *rationale Zahl* genannt. Sie bilden die Menge \mathbf{Q} .

Dividend (Zähler)
 Divisor (Nenner)

$$\rightarrow \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Quotient (Bruch)}} = \underbrace{a \div b}_{\text{Quotient (Bruch)}}$$

$$a \in \mathbf{Z}; b \in \mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$$

Spezialfälle

$$\frac{0}{a} = 0$$

denn $0 \cdot a = 0$

$$\frac{a}{a} = 1$$

denn $a = a \cdot 1$

$$\frac{a}{0} \text{ ist nicht erlaubt}$$

Vorzeichen

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Deshalb gelten sinngemäss die gleichen Vorzeichenregeln wie für die Multiplikation.

Brucharten

Stammbrüche: z.B. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$

Echte Brüche: z.B. $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{13}$

Unechte Brüche: z.B. $\frac{10}{9}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{17}{7}$

Scheinbrüche: z.B. $\frac{5}{1}$; $\frac{15}{3}$; $\frac{4}{2}$

Reziproke bzw. inverse Brüche: z.B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{7}$ und $\frac{7}{5}$

Dezimalbrüche: z.B. 0,1; 0,37; 0,6

Gleichnamige Brüche: z.B. $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{6}{7}$

Ungleichnamige Brüche: z.B. $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$

4.2 Erweitern und Kürzen

Brüche kann man Erweitern und Kürzen. Ihr Wert verändert sich dabei nicht. Solche Brüche nennt man *gleichwertig*.

Erweitern heisst: Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.

$$\text{z.B. } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

Kürzen heisst: Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividieren.

$$\text{z.B. } \frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$$

Man kürzt nur, wenn beide Divisionen ganze Zahlen ergeben.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von *Primzahlen* (eine Primzahl ist nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar) schreiben, lässt sich also in *Primfaktoren* zerlegen. Zur Bestimmung des kgV stellt man jede Zahl als Produkt ihrer Primzahlen dar. Tritt dabei eine Primzahl öfter auf, so benutzt man die Potenzschreibweise.

Beispiel 1

Geg: 9, 15, 21

Ges: kgV

Lösung:

	3	5	7	
9	3^2			
15	3	5		
21	3		7	
kgV	3^2	5	7	= 315

Beispiel 2

Geg: 4, 7, 28

Ges: kgV

Lösung:

	2	7	
4	2^2		
7		7	
28	2^2	7	
kgV	2^2	7	= 28

Beispiel 3

Geg: 8ab, 12bx, 14ax

Ges: kgV

Lösung:

	2	3	7	a	b	x	
8ab	2^3			a	b		
12bx	2^2	3			b	x	
14ax	2		7	a			x
kgV	2^3	3	7	a	b	x	= 168abx

Merke

Das kgV von Zahlen ist das Produkt der höchsten auftretenden Primzahlenpotenzen dieser Zahlen.

Grösster gemeinsamer Teiler (ggT)

Wird ein Bruch durch den grössten gemeinsamen Teiler, den ggT, gekürzt, so ist er nicht weiter zu kürzen.

Beispiel 1

Geg: 48, 84, 120

Ges: ggT

Lösung:

	2	3	5	7
48	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$			
84	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$			
120	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$			
ggT	$2 \cdot 2 \cdot 3$			

Beispiel 2

Geg: 54aby, 45by, 63ab

Ges: ggT

Lösung:

	2	3	5	7	a	b	y
54aby	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot y$						
45by		$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b \cdot y$					
63ab		$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a \cdot b$					
ggT		$3 \cdot 3 \cdot b$					

Beispiel 3

Geg: 60abcx, 120ax, 140abx

Ges: ggT

Lösung:

	2	3	5	7	a	b	c	x
60abcx	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot x$							
120ax	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot x$							
140abx	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot b \cdot x$							
ggT	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a \cdot x$							

Merke

Der ggT von Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren dieser Zahlen.

4.3 Übungen

Berechnen Sie das kgV mit Hilfe eines Schemas:

1.
$$\begin{array}{r} 3 \\ 17 \\ 51 \\ 102 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 16 \\ 24 \\ 49 \\ 56 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 66 \\ 396 \\ 714 \\ 924 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 6x \\ 8x \\ 5xz \\ 12x \\ 108xy \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{r} 4mn \\ 6mp \\ 8np \\ 10m \\ 24p \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{r} 4x + 2y \\ 6x + 3y \\ 8x + 4y \end{array}$$

Berechnen Sie den ggT mit Hilfe eines Schemas:

7.
$$\begin{array}{r} 180 \\ 210 \\ 270 \\ 300 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{r} 28abx \\ 112acx \\ 224adx \\ 336ax \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{r} 4b + 2c \\ 8b + 4c \\ 12b + 6c \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 36ax - 24ay \\ 48bx - 32by \\ 72abx - 48aby \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{r} 306xyz \\ 170yz \\ 136xz \\ 204z \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{r} 3ax + 6cx \\ 9ax + 18cx \\ 12ax + 24cx \end{array}$$

Kürzen von Bruchtermen:

13.
$$\frac{8ac - 4adx - 2a}{2a}$$

14.
$$\frac{39abd - 12acd}{3a}$$

15.
$$\frac{-6a + 2a - 8x}{-4ax}$$

16.
$$\frac{14ab + 7ac + 42ab}{70ab + 14ac + 7ab}$$

17.
$$\frac{b - 2}{2 - b}$$

18.
$$\frac{25ab - 5az}{15bx - 3xz - 5ab + az}$$

19.
$$\frac{3ab - 6ac}{-6cx + 3bx}$$

20.
$$\frac{2ax + 2cx - 5ay - 5cy}{3a + 3c}$$

21.
$$\frac{2ab + 3ay - 2bx - 3xy}{2bc + 3cy - 2bx - 3xy}$$

4.4 Addition und Subtraktion

a) von gleichnamigen Brüchen

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{d}{c} = \frac{a+b-d}{c}$$

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler der Brüche bei unverändertem Nenner addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele:

$$1) \quad \frac{5a}{12} - \frac{a}{12} + \frac{3a}{12} = \frac{5a - a + 3a}{12} = \frac{7a}{12}$$

$$2) \quad \frac{n+x}{4} + \frac{n-x}{4} = \frac{n+x+n-x}{4} = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$$

$$3) \quad \frac{a+b}{a} - \frac{a-b+c}{a} = \frac{a+b-(a-b+c)}{a} = \frac{a+b-a+b-c}{a} = \frac{2b-c}{a}$$

b) von ungleichnamigen Brüchen

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} - \frac{6}{12} = \frac{10+9-6}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

Ungleichnamige Brüche muss man vor dem Addieren und Subtrahieren gleichnamig machen. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Einzelnenner.

Beispiele:

$$1) \quad \frac{a}{3} + \frac{3a}{4} - \frac{5a}{6} = \frac{4a+9a-10a}{12} = \frac{3a}{12} = \frac{a}{4}$$

$$2) \quad \frac{m-x}{3} + m = \frac{m-x+3m}{3} = \frac{4m-x}{3}$$

$$3) \quad \frac{2b}{3} - \frac{7b}{8} + \frac{11b}{12} + \frac{3b}{4} = \frac{16b-21b+22b+18b}{24} = \frac{35b}{24} = 1\frac{11}{24}b$$

4.5 Multiplikation und Division

a) Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Brüche werden multipliziert indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Beispiele:

1) $\frac{a}{x} \cdot \frac{3b}{2x} = \frac{3ab}{2x^2}$

2) $5 \cdot \frac{3a}{2b} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3a}{2b} = \frac{15a}{2b}$

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{b^3} = \frac{2ax}{6b^4} = \frac{ax}{3b^4}$

4) $\left(\frac{-6a}{x}\right) \cdot \left(3 - \frac{2b}{3x}\right) = -\frac{18a}{x} + \frac{\overset{4}{\cancel{12}} ab}{\underset{1}{\cancel{3} x^2}} = -\frac{18a}{x} + \frac{4ab}{x^2} = \frac{-18ax + 4ab}{x^2}$
je nach Aufgabenstellung, wenn z. B. verlangt wird: Schreiben Sie als einen Bruch!

5) $\left(\frac{2a}{3} - 1\right) \cdot \left(\frac{3x}{2a} + \frac{2}{5}\right) = \frac{6ax}{6a} + \frac{4a}{15} - \frac{3x}{2a} - \frac{2}{5} = x + \frac{4a}{15} - \frac{3x}{2a} - \frac{2}{5}$

6) $1\frac{3}{5} a \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{8a}{5} \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{16a^2}{15b}$

b) Division

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

Beispiele:

$$1) \quad \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$2) \quad \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$3) \quad \frac{3x}{5a} \div \frac{2a}{3b} = \frac{3x}{5a} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{9bx}{10a^2}$$

$$4) \quad \frac{2x}{y} \div \frac{x}{a} \div \frac{5}{3} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6ax}{5xy} = \frac{6a}{5y}$$

$$5) \quad \frac{ax+bx}{a-b} \div (a+b) = \frac{x(a+b)}{a-b} \div \frac{a+b}{1} = \frac{x(a+b)}{a-b} \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{x(a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{x}{a-b}$$

$$6) \quad \left(1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}\right) \div \left(\frac{1}{m} + 1\right) = \left(\frac{m^2 + 2m + 1}{m^2}\right) \div \left(\frac{1+m}{m}\right) = \left[\frac{(m+1)(m+1)}{m^2}\right] \cdot \left(\frac{m}{1+m}\right) = \frac{m+1}{m}$$

Achtung: Wenn möglich Summen in Faktoren zerlegen und kürzen!

c) Doppelbrüche (gewöhnlicher)

$$\frac{\frac{6m}{5a}}{\frac{18n}{10a}} = \frac{6m}{5a} \div \frac{18n}{10a} = \frac{6m}{5a} \cdot \frac{10a}{18n} = \frac{60am}{90an} = \frac{2m}{3n}$$

Sind Zähler und Nenner eines Bruches wieder Brüche, so spricht man von einem Doppelbruch. Dabei kann der Hauptbruchstrich durch einen Doppelpunkt ersetzt werden.

Der Hauptbruchstrich befindet sich auf der Höhe des Gleichheitszeichens (Operationszeichen).

Beispiele:

$$1) \quad \frac{\frac{m}{a}}{\frac{n}{a}} = \frac{m}{a} \cdot \frac{a}{n} = \frac{m}{n}$$

$$2) \quad \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{b+a}{b}} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a}$$

$$3) \quad \frac{\frac{18ab}{25xy}}{\frac{9b}{5y}} = \frac{18ab}{25xy} \cdot \frac{5y}{9b} = \frac{2a}{5x}$$

$$4) \quad \frac{c - \frac{d}{a}}{c + \frac{d}{a}} = \frac{\frac{ac-d}{a}}{\frac{ac+d}{a}} = \frac{ac-d}{a} \cdot \frac{a}{ac+d} = \frac{ac-d}{ac+d}$$

$$5) \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y-x}{xy}} = \frac{(x+y)xy}{xy(y-x)} = \frac{x+y}{y-x}$$

$$6) \quad \frac{2 - \frac{3}{7}}{\frac{7}{5} + 4} = \frac{\frac{14-3}{7}}{\frac{7+20}{5}} = \frac{\frac{11}{7}}{\frac{27}{5}} = \frac{11 \cdot 5}{7 \cdot 27} = \frac{55}{189}$$

4.6 Übungen

1.
$$\frac{4x}{4c-3d} - \frac{3x}{3a-4b}$$

2.
$$\frac{5x}{a+b} - \frac{3y}{cd} + \frac{4x}{a+b} + \frac{8y}{cd} + \frac{x}{cd}$$

3.
$$\frac{2x+5}{4x-4} + \frac{5x-3}{6x-6} - \frac{2x+1,5}{2x-2}$$

4.
$$\frac{4a-2}{2a+4} - \frac{8a-7}{6a+12} - \frac{2a-5}{10a+20}$$

5.
$$\frac{12a}{5b} \cdot 9\frac{1}{3}b \cdot \frac{15x}{14a}$$

6.
$$\left(-\frac{15ab}{76xy}\right) \cdot \left(-\frac{4x}{5b}\right) \cdot \left(-7\frac{3}{5}y\right)$$

7.
$$\frac{5x+15}{x^2-y^2} \cdot (x-y)$$

8.
$$\frac{a-3}{3 \cdot (a^2-16)} \cdot (3a+12)$$

9.
$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2$$

10.
$$\left(\frac{3u}{4v} - \frac{5x}{6y}\right)^2$$

11.
$$\frac{6x+3y}{4a-4b} \div \frac{12ax+6ay}{7ax-7bx}$$

12.
$$\left[\left(\frac{2x}{4} \div \frac{1}{3}\right) \div \frac{x}{5}\right] \div 4a$$

13.
$$\left(\frac{3ax}{4bc} \div \frac{6ad}{8c}\right) \div \frac{18x}{2b}$$

14.
$$\left(\frac{3 \cdot (a-1)}{a \cdot (x-1)} \div \frac{5 \cdot (1-a)}{a \cdot (x+1)}\right) \div \frac{1}{15 \cdot (1-x)}$$

$$15. \quad \frac{\frac{1}{x} + y}{\frac{1}{x} - y}$$

$$16. \quad \frac{\frac{a}{b} - \frac{x}{y}}{\frac{a}{b} + \frac{x}{y}}$$

$$17. \quad -(2x - 8y) + 3y + (-2x - 5y)$$

$$18. \quad 18a - [-(-3a + 5b - c) - 5a] - 2b$$

$$19. \quad (a - b) \cdot (2a - b)$$

$$20. \quad (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$21. \quad (x^2 - 8x + 7) : (x - 7)$$

$$22. \quad (2c^3 - 18c^2 + 33c - 35) : (c - 7)$$

$$23. \quad \frac{4a}{5b} : \frac{16a^2}{10b}$$

$$24. \quad \frac{14(a^2 - b^2)}{\frac{21a - 21b}{a + b}}$$

$$25. \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}$$

$$26. \quad \frac{4}{x-1} - \frac{3}{1-x}$$

$$27. \quad \frac{m}{m-1} \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{mn - m}$$

$$28. \quad \frac{\frac{2a}{a-3} - \frac{a}{a+4}}{\frac{a+11}{a^2 + a - 12}}$$