Logarithmen 2013, TBM

Prüfungsdauer	■ 70 Minuten
Hilfsmittel	■ Formelsammlung, Taschenrechner **ohne CAS**!
Bedingungen	■ Dokumentieren Sie den Lösungsweg sauber. ■ Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. ■ Das Resultat ist so weit als möglich zu vereinfachen. ■ **Kontrollieren Sie Ihre Resultate!** ■ Falls der freie Platz bei den Aufgaben nicht ausreicht, benutzen Sie bitte Zusatzblätter. Versehen Sie die Aufgabenseite mit einem Hinweis wie «Fortsetzung auf Zusatzblatt».

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Name und Vorname ....

Bewertungsübersicht

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Darstellung
Punkte	2	2	1.5	2.5	3	2.5	3	0.5

Gesamtpunkte
17

Note

Aufgabe 1

2 Punkte

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
Total 2	

Zerlegen Sie den Term mit Hilfe der Logarithmengesetze.

a. $\lg \dfrac{x^2 y^3 \sqrt{z}}{(xyz)^2} = ?$ $\qquad$ $x,\ y,\ z > 0$

Lösung:

$$\lg \frac{x^2 y^3 z^{\frac{1}{2}}}{x^2 y^2 z^2} = \lg\left(x^{2-2} y^{3-2} z^{\frac{1}{2}-2} \right) = \underbrace{\lg\left(y z^{-\frac{3}{2}} \right)}_{(0.5)} = \lg y + \lg\left(z^{-\frac{3}{2}} \right) = \underbrace{\underline{\underline{\lg y - \frac{3}{2} \lg z}}}_{(0.5)}$$

b. $\ln \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[3]{m}}} = ?$ $\qquad$ $m > 0$

Lösung:

$$\ln \sqrt[5]{\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{3}}}} = \ln \sqrt[5]{m^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}} = \underbrace{\ln \sqrt[5]{m^{\frac{1}{6}}}}_{(0.5)} = \ln\left(m^{\frac{1}{30}} \right) = \underbrace{\underline{\underline{\frac{1}{30} \cdot \ln m}}}_{(0.5)}$$

oder

$$\ln \sqrt[5]{\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{3}}}} = \ln \frac{m^{\frac{1}{10}}}{m^{\frac{1}{15}}} = \underbrace{\ln\left(m^{\frac{3}{30}-\frac{2}{30}} \right)}_{(0.5)} = \ln\left(m^{\frac{1}{30}} \right) = \underbrace{\underline{\underline{\frac{1}{30} \cdot \ln m}}}_{(0.5)}$$

Aufgabe 2 — 2 Punkte

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
Total 2	

Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmusterm zusammen. **Alle Numeri > 0.**

a. $\frac{1}{2}\cdot\left[\lg m + \lg(mn)\right] - \lg n = ?$

Lösung:

$$\frac{1}{2}\cdot\lg\left(m^2n\right) - \lg n = \underbrace{\lg\sqrt{m^2n} - \lg n}_{(0.5)} = \lg\frac{m\sqrt{n}}{n} = \lg\underbrace{\underline{\underline{\frac{m}{\sqrt{n}}}}}_{(0.5)}$$

b. $a - b\cdot\lg x = ?$

Lösung:

$$\lg x = a \quad\Leftrightarrow\quad 10^a = x$$

$$\underbrace{\lg 10^a}_{(0.5)} - \lg\left(x^b\right) = \lg\underbrace{\underline{\underline{\frac{10^a}{x^b}}}}_{(0.5)}$$

Aufgabe 3 1.5 Punkte

a.	0.5
b.	0.5
c.	0.5
Total 1.5	

Vereinfachen Sie **ohne Taschenrechner** so weit als möglich. **Lösungsweg dokumentieren**!

a. $e^{-\ln 5} = ?$

Lösung:

$e^{\ln\left(5^{-1}\right)} = \underline{\underline{5^{-1}}}$

b. $e^{0.5 \cdot \ln 25} = ?$

Lösung:

$e^{\ln\sqrt{25}} = e^{\ln 5} = \underline{\underline{5}}$

c. $e^{\ln 6 - \ln 2} = ?$

Lösung:

$e^{\ln\frac{6}{2}} = e^{\ln 3} = \underline{\underline{3}}$

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
Total 2.5	

Aufgabe 4 2.5 Punkte

Berechnen Sie x **ohne Taschenrechner**. **Lösungsweg dokumentieren**!

a. $\log_x 625 = -4$

Lösung:

$$x^{-4} = 625 = 5^4$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 5^4}_{(0.5)} \rightarrow \frac{1}{x} = 5 \rightarrow x = \underbrace{\underline{\underline{\frac{1}{5}}}}_{(0.5)}$$

b. $\log_2(-\log_3 x) = 2$

Lösung:

$$\log_2(-\log_3 x) = 2 \Leftrightarrow \underbrace{2^2 = -\log_3 x = \log_3\left(x^{-1}\right)}_{(0.5)}$$

$$2^2 = \log_3\left(x^{-1}\right) \Leftrightarrow \underbrace{3^4 = x^{-1} = \frac{1}{x}}_{(0.5)} \rightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{3^4}}} = \underbrace{\underline{\underline{\frac{1}{81}}}}_{(0.5)}$$

Aufgabe 5 3 Punkte

a.	0.5
	0.5
b.	0.5
	0.5
	0.5
	0.5
	Total 3

Bestimmen Sie den Definitionsbereich für folgende Terme T. G = R.

a. $T(x) = \sqrt{2x+1} + \lg\left(8-2x^2\right)$

Lösung:

$$2x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad 8-2x^2 > 0$$
$$2x \geq -1 \quad \wedge \quad 4-x^2 > 0$$
$$x \geq -1/2 \quad \wedge \quad (2-x)(2+x) > 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{(+)}_{x<2} \cdot \underbrace{(+)}_{x>-2} > 0 \quad \vee \quad \underbrace{\underbrace{(-)}_{x>2} \cdot \underbrace{(-)}_{x<-2}}_{\text{unmöglich}} > 0$$

$$\underbrace{x \geq -1/2}_{(0.25)} \quad \wedge \quad \underbrace{(-2 < x < 2)}_{(0.25)}$$

somit: $\underbrace{D = \left\{ x \in R \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq x < 2 \right\}}_{(0.5)}$

b. $T(x) = \lg\left(x^2 + 6x + 8\right)$

Lösung:

$$x^2 + 6x + 8 > 0$$
$$(x+4)(x+2) > 0$$

1. Fall: $(+)\cdot(+) > 0 \quad \vee \quad$ 2. Fall: $(-)\cdot(-) > 0$

$$x+4>0 \quad \wedge \quad x+2>0 \quad \vee \quad x+4<0 \quad \wedge \quad x+2<0$$
$$\underbrace{x>-4 \quad \wedge \quad x>-2}_{\substack{x>-2 \\ (0.5)}} \quad \vee \quad \underbrace{x<-4 \quad \wedge \quad x<-2}_{\substack{x<-4 \\ (0.5)}}$$

somit: $\underbrace{D = \left\{ x \in R \,\middle|\, x > -2 \quad \overbrace{\vee}^{(0.5)} \quad x < -4 \right\}}_{(0.5)}$

Aufgabe 6 2.5 Punkte

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der Gleichung (G = **R**).

$2\cdot5^{p-2}+2^p=12\cdot5^{p-3}+3\cdot2^{p-3}$ $\qquad p=?$

0.25	
0.5	
0.5	
0.5	
0.5	
0.25	
Total 2.5	

Lösung:

$2\cdot5^{p-2}+2^p=12\cdot5^{p-3}+3\cdot2^{p-3}$	|ordnen $\qquad D=\mathbb{R}$	$(D\rightarrow0.25)$
$2^p-3\cdot2^{p-3}=12\cdot5^{p-3}-2\cdot5^{p-2}$	|faktorisieren	(0.5)
$2^p\cdot\underbrace{\left(1-3\cdot2^{-3}\right)}_{\frac{5}{8}}=5^p\cdot\underbrace{\left(12\cdot5^{-3}-2\cdot5^{-2}\right)}_{\frac{2}{125}}$	$\|:5^p \qquad \|:\frac{5}{8}$	(0.5)
$\left(\frac{2}{5}\right)^p=\frac{2}{125}\cdot\frac{8}{5}=\frac{2\cdot2^3}{5^3\cdot5}=\left(\frac{2}{5}\right)^4$	|Exponenten gleichsetzen	(0.5)
$p=\underline{4}$	|Kontrolle mit TR	(0.5)
somit: $L=\underline{\underline{\{4\}}}$		(0.25)

Aufgabe 7

3 Punkte

0.5
0.5
0.5
0.25
0.25
0.25
0.25
0.5
Total 3

Lösen Sie die Gleichung mit einer geeigneten Substitution (G = **R**).

$\lg\sqrt{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lg x}$ $\qquad x > 0$

Lösung:

$\frac{1}{2}\cdot\lg x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lg x}$ $\qquad D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$

Substitution: sei $u = \lg x$

$\frac{1}{2}\cdot u = \frac{1}{2} + \frac{1}{u}$ $\qquad |\cdot 2u$ $\qquad (0.5)$

$u^2 = u + 2$ $\qquad |$ordnen

$u^2 - u - 2 = 0$ $\qquad |$faktorisieren

$(u-2)(u+1) = 0$ $\qquad (0.5)$

$u_1 = \underline{\underline{2}} \quad \vee \quad u_2 = \underline{\underline{-1}}$ $\qquad (0.5)$

Rücksubstitution:

$2 = \lg x \quad \Leftrightarrow \quad 10^2 = x$ $\qquad (0.25)$

$-1 = \lg x \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-1} = x$ $\qquad (0.25)$

Kontrolle:

$x = 100: \quad \lg\sqrt{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lg 100}$ $\qquad (w)$ $\qquad (0.25)$

$x = 10^{-1}: \quad \lg\sqrt{10^{-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lg\left(10^{-1}\right)}$ $\qquad (w)$ $\qquad (0.25)$

somit: $L = \underline{\underline{\{10^{-1};\ 10^2\}}}$ $\qquad (0.5)$