8 Logarithmen

8.1 Einführung

Das Logarithmieren ist die zweite Umkehroperation des Potenzierens.

Potenzieren	$3^2 = x$	Es ist der **Potenzwert x gesucht** (Ergebnis Kettenmultiplikation). Man erhält x durch Potenzieren (Kettenmultiplikation): $3^2 = 9$
Radizieren	$x^2 = 9$	Es ist die **Basis x gesucht**. Man erhält x durch Radizieren (Wurzelziehen): $x^2 = 9$ $x = \sqrt{9} = 3$
Logarithmieren	$3^x = 9$	Es ist der **Exponent x** (Logarithmus) **gesucht**. Man erhält x durch Logarithmieren: $\log_3 9 = 2$ (man liest: «Logarithmus von 9 zur Basis 3 gleich 2»)

Den Logarithmus berechnen heisst den Exponenten einer Potenz bestimmen!

8.2 Der Begriff des Logarithmus (Definition)

Eine Logarithmusgleichung kann immer auch als Exponentialgleichung umgeschrieben werden. Beim Logarithmieren verwendet man allerdings andere Bezeichnungen.

$$\underbrace{\log_a b = x}_{\text{Logarithmusform}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{a^x = b}_{\text{Exponentialform}}$$

a: Basis	a: Basis
b: Numerus	b: Potenzwert
x: Logarithmus	x: Exponent

Beispiele

$\log_2 32 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 32 = 2^5 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{5}}$

$\log_{10} 1'000 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 1'000 = 10^3 \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{3}}$

$\log_{10} 0.0001 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 0.0001 = 10^{-4} \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{-4}}$

$\log_5 \sqrt{5} = x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = \sqrt{5} = 5^{1/2} \quad \rightarrow \quad x = \underline{\underline{1/2}}$

8.3 Praktische Anwendung des Logarithmus

Der Logarithmus kommt zum Beispiel dort zur Anwendung, wo Gleichungen nach dem Exponent (Hochzahl) umgeformt werden müssen (Exponentialgleichungen). Solche Gleichungen kommen bei der Zinseszinsrechnung, in der Elektrotechnik (Aufladung Kondensator, Momentanwert des Einschaltsstroms von Spulen), bei Wachstums- und Zerfallsgesetzen, Messung von Lautstärke und so weiter vor.

Beispiel Zinseszins

In wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 2% Jahreszins?

Zahlenbeispiel mit der Annahme eines Anfangskapitals K_0 = 1'000 und p = 2%:

Abkürzung Kapital	n (Anzahl Jahre)	Kapital Anfang Jahr	Zinsertrag	Kapital Ende Jahr
K_0	0	1'000.00	20.00	1'020.00 = K_1
K_1	1	1'020.00	20.40	1'040.40 = K_2
K_2	2	1'040.40	20.81	1'061.21 = K_3
usw.				

Allgemeine Berechnung analog Zahlenbeispiel:

Abkürzung Kapital	n (Anzahl Jahre)	Kapital Anfang Jahr	Zinsertrag	Kapital Ende Jahr
K_0	0	K_0	$\frac{K_0 \cdot p}{100}$	$K_0 + \frac{K_0 \cdot p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_1$
K_1	1	K_1	$\frac{K_1 \cdot p}{100}$	$K_1 + \frac{K_1 \cdot p}{100} = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_2$
K_2	2	K_2	$\frac{K_2 \cdot p}{100}$	$K_2 + \frac{K_2 \cdot p}{100} = K_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_3$
usw.				

Herleitung Zinseszinsformel:

aus Zeile 1: $K_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_1$ (1)

aus Zeile 2: $K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_2$ (2)

(1) in (2): $\underbrace{K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)}_{K_1}\left(1+\frac{p}{100}\right) = K_2$

somit: $K_2 = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$

allgemein: $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

K_n: Kapital am Ende des n-ten Jahres (Endkapital)
K_0: Kapital zu Beginn der Laufzeit (Anfangskapital)
p: Zinssatz in Prozenten
n: Anzahl Zeitabschnitte (meistens Jahre)

Mit Hilfe der Zinseszinsformel kann nun eine Gleichung für das Problem aufgestellt werden.

gegeben: $K_n = 2\ K_0$, $p = 2\%$

gesucht: $n = ?$

Lösung:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^n \qquad |:K_0$$

$$2 = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^n$$

$$\underbrace{2 = 1.02^n}_{\text{Exponentialform}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\log_{1.02} 2 = n}_{\text{Logarithmusform}}$$

oder mit Logarithmengesetzen (siehe Skript) umgeformt:

$$2 = 1.02^n \qquad |\lg$$

$$\lg 2 = \lg\left(1.02^n\right)$$

$$\lg 2 = n \cdot \lg 1.02 \qquad |:\lg 1.02$$

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1.02} = \underline{\underline{35}}$$

Antwort: Bei 2% Jahreszins verdoppelt sich ein Kapital in 35 Jahren.

8.4 Übungen

Bringen Sie die folgenden Gleichungen in die Logarithmusform:

1. $2^6 = 64$

2. $6^2 = 36$

3. $4^1 = 4$

4. $5^0 = 1$

5. $3^{-1} = 1/3$

6. $(1/2)^4 = 1/16$

7. $32^{\frac{1}{5}} = 2$

Bringen Sie die folgenden Gleichungen in die Exponentialform:

8. $\log_3 81 = 4$

9. $\log_2 128 = 7$

10. $\log_3 1 = 0$

11. $\log_6 6 = 1$

12. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$

13. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

14. $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

Bringen Sie die folgenden Gleichungen in die Exponentialform und berechnen Sie dann x:

15. $\log_3 x = 2$

16. $\log_8 x = 2$

17. $\log_2 x = 5$

18. $\log_5 x = 0$

19. $\log_3 x = -1$

20. $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

21. $\log_5 x = -2$

Bestimmen Sie x durch Umwandlung in eine Exponentialgleichung:

22. $\log_2 8 = x$

23. $\log_{10} 1 = x$

24. $\log_6 1 = x$

25. $\log_4 4 = x$

26. $\log_4 \frac{1}{64} = x$

27. $\log_{\frac{1}{2}} 16 = x$

28. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = x$

29. $\log_a \sqrt[3]{a} = x$

30. $\log_a \left(a^{\frac{1}{b}} \right) = x$

31. $\log_b \frac{1}{b} = x$

32. $\log_3 \sqrt[5]{3^2} = x$

33. $\log_3 \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = x$

34. $\log_{10} \left[\left(\sqrt[3]{10^5} \right)^{-1} \right] = x$

8.5 Spezialfälle

$\log_a 1 = 0$	weil $a^0 = 1$
$\log_a a = 1$	weil $a^1 = a$
$\log_a \frac{1}{a} = -1$	weil $a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\log_a \sqrt{a} = 1/2$	weil $a^{1/2} = \sqrt{a}$
$\log_a (a^x) = x$	weil $a^x = a^x$
$a^{\log_a b} = b$	weil $\underbrace{\log_a b = x}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{a^x = b}_{(2)} \rightarrow$ (1) in (2): $a^{\log_a b} = b$

8.6 Gültigkeit

Der Zahlenbereich, in dem gearbeitet wird, sind die reellen Zahlen. Der Logarithmus soll in dieser Zahlenmenge bleiben. Dazu müssen für die Basis und den Numerus einige Bedingungen erfüllt sein.

Bedingungen für Numerus b:

Der Logarithmus ist für $b \le 0$ nicht definiert:

$\log_2(-2) = x \quad \rightarrow \quad 2^x = -2 \quad$ (Widerspruch)

$\log_{10} 0 = x \quad \rightarrow \quad 10^x = 0 \quad$ (Widerspruch)

somit gilt: **$b > 0$**

Bedingungen für Basis a:

Der Logarithmus ist für $a \le 0$ und für $a = 1$ nicht definiert:

$\log_{(-3)} x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} = x \quad$ (nicht definiert)

$\log_0 0 = x \quad \rightarrow \quad 0^x = 0 \quad$ (nicht eindeutig, x könnte beliebige positive Zahl sein)

$\log_1 1 = x \quad \rightarrow \quad 1^x = 1 \quad$ (nicht eindeutig, x könnte beliebige Zahl sein)

somit gilt: **$a > 0$ und $a \neq 1$**

Zusammenfassung Definition (Grundformel) und Gültigkeit:

$$\boxed{\begin{gathered}\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0\end{gathered}}$$

8.7 Die Wahl der Basis

Logarithmen mit gleicher Basis bilden ein Logarithmensystem. Um bei Logarithmen von gängigen Systemen die Basis nicht immer mitschreiben zu müssen, werden folgende Kurzschreibweisen benutzt:

Logarithmus mit der Basis	Schreibweise	Bezeichnung	Anwendung	Bemerkung
a	$\log_a$	Logarithmus zur Basis a	beliebige Basis	allgemeine Formulierung
10	lg ($\lg = \log_{10}$)	Zehnerlogarithmus (dekadischer L.)	am meisten verbreitet	von Henry Biggs vorgeschlagen
2	lb ($\mathrm{lb} = \log_2$)	Binärlogarithmus	vor allem in der Informatik	auch Logarithmus dualis (ld)
e	ln ($\ln = \log_e$)	natürlicher Logarithmus	Wachstum und Zerfall	Logarithmus naturalis (ln)

Natürliche Logarithmen (ln)

Die Logarithmen zu der Grundzahl e (2.71828182846…) spielen in der Physik und Technik eine wichtige Rolle. Die Eulersche Zahl ist nach Leonhard Euler benannt, der e als Basis des natürlichen Logarithmus einführte. Leonhard Euler wurde in Basel geboren und war einer der bedeutendsten Mathematiker. Euler war extrem produktiv. Es gibt insgesamt 866 Publikationen von ihm. Leonhard Euler war auf der Schweizerischen 10 Franken Banknote abgebildet (Serie von 1984):

Die bekannteste Darstellung der Eulerschen Zahl lautet wie folgt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ldots.$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

8.8 Logarithmengesetze

Logarithmus eines Produktes (Produkteregel)

$$\boxed{\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c}$$

Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.

Beweis:

Potenzgesetz/Substitution $\quad a^x\cdot a^y=a^{x+y} \quad$ mit $a^x=b$ und $a^y=c$

daraus folgt: $\quad b\cdot c=a^{x+y} \Leftrightarrow \log_a(b\cdot c)=x+y \quad (1)$

Rücksubstitution $\quad \left.\begin{array}{l} \text{mit } a^x=b \Leftrightarrow \log_a b=x \\ \text{mit } a^y=c \Leftrightarrow \log_a c=y \end{array}\right\} \quad (2)$

und damit (2) in (1): $\quad \log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$

Zahlenbeispiel

$$\lg(10\cdot 100)=\lg 10+\lg 100$$
$$\lg(1'000)=1+2=\underline{\underline{3}} \Leftrightarrow 10^3=1'000$$

Logarithmus eines Quotienten (Divisionsregel)

$$\boxed{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c}$$

Ein Bruch wird logarithmiert, indem man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahiert.

Beweis:

Potenzgesetz/Substitution $\quad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \quad$ mit $a^x=b$ und $a^y=c$

daraus folgt: $\quad \frac{b}{c}=a^{x-y} \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=x-y \quad (1)$

Rücksubstitution $\quad \left.\begin{array}{l} \text{mit } a^x=b \Leftrightarrow \log_a b=x \\ \text{mit } a^y=c \Leftrightarrow \log_a c=y \end{array}\right\} \quad (2)$

und damit (2) in (1): $\quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$

Zahlenbeispiel

$$\lg\left(\frac{1'000}{10}\right)=\lg 1'000-\lg 10$$
$$\lg(100)=3-1=\underline{\underline{2}} \Leftrightarrow 10^2=100$$

Logarithmus einer Potenz (Potenzregel)

$$\boxed{\log_a\left(b^n\right) = n \cdot \log_a b}$$

Eine Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Potenzbasis mit dem Exponenten multipliziert.

Beweis:

setzt man $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ (1)

Potenz mit n potenziert $a^{n\cdot x} = b^n \Leftrightarrow \log_a\left(b^n\right) = n \cdot x$ (2)

und damit (1) in (2): $\log_a\left(b^n\right) = n \cdot \log_a b$

Zahlenbeispiel

$\lg\left(10^3\right) = 3 \cdot \lg 10$

$\lg 1'000 = 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}} \Leftrightarrow 10^3 = 1'000$

anschaulicher Beweis: $\underline{\underline{\log_a\left(5^3\right)}} = \log_a(5 \cdot 5 \cdot 5) = \log_a 5 + \log_a 5 + \log_a 5 = \underline{\underline{3 \cdot \log_a 5}}$

Achtung bei Summen und Differenzen:

$\log_a(b + c) \neq \underbrace{\log_a b + \log_a c}_{\text{Ergebnis Multiplikationsregel}}$ (kein Gesetz für Logarithmus einer Summe)

$\log_a(b - c) \neq \underbrace{\log_a b - \log_a c}_{\text{Ergebnis Divisionsregel}}$ (kein Gesetz für Logarithmus einer Differenz)

Zahlenbeispiel

$\lg(7 + 3) = \lg(10) = \underline{\underline{1}}$

$\lg 7 + \lg 3 = 0.845 + 0.477$

somit: $\lg(7 + 3) \neq \lg 7 + \lg 3$

Fazit: Es gibt keine Logarithmusgesetze für Summen und Differenzen. Eventuell können Summen und Differenzen nach dem Zusammenfassen logarithmiert werden.

Umrechnung in die Basis b mit Hilfe der Basis a (Basiswechsel)

$$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}}$$

Eine Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Potenzbasis mit dem Exponenten multipliziert.

Beweis:

setzt man: $\log_b c = x$ (1)

so ist in Potenzform: $b^x = c$

daraus folgt: $\log_a\left(b^x\right) = \log_a c$ (2)

Potenzregel auf (2) angewendet: $x \cdot \log_a b = \log_a c \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ (3)

und damit (3) in (1): $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

Zahlenbeispiel $\log_3 81 = \dfrac{\log_{10} 81}{\log_{10} 3} = \dfrac{\lg 81}{\lg 3} = \dfrac{1.9085}{0.4771} = \underline{\underline{4}} \quad \Leftrightarrow \quad 3^4 = 81$

Beweisführung mit konkreten Zahlenwerten:

$$\log_3 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{3^x = 81}_{\substack{\text{beide Seiten}\\ \text{logarithmieren}}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\lg\left(3^x\right) = \lg 81}_{\substack{\text{Potenzregel}\\ \text{mit Zehnerbasis}}} \quad \rightarrow \quad x \cdot \lg 3 = \lg 81 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\lg 81}{\lg 3} = \underline{\underline{4}}$$

die Berechnung kann mit beliebigen Basen durchgeführt werden:

$$\log_3 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{3^x = 81}_{\substack{\text{beide Seiten}\\ \text{logarithmieren}}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\ln\left(3^x\right) = \ln 81}_{\substack{\text{Potenzregel}\\ \text{mit der Basis e}}} \quad \rightarrow \quad x \cdot \ln 3 = \ln 81 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln 81}{\ln 3} = \underline{\underline{4}}$$

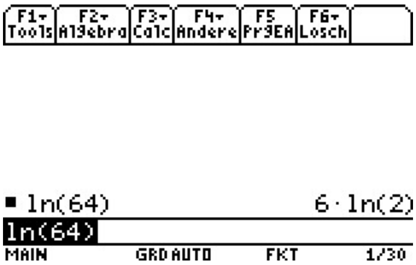
8.9 Logarithmieren mit dem TI

Natürlicher Logarithmus

Beispiel: ln64 = ?

Eingabe: [2nd][LN][6][4][)][ENTER]

Display:

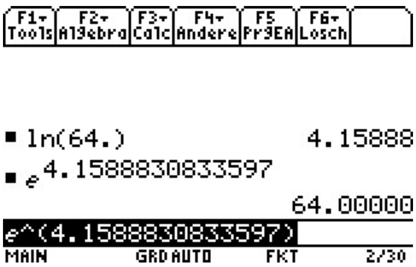


Ergebnis: $6 \cdot \ln(2)$

Näherung: [◆][≈] → 4.15888
Näherung direkt: [2nd][LN][6][4][.][)][ENTER]

Eingabe Kontrolle: [◆][e^x][4][.][1][5][8][8][8][)][ENTER]

Display:



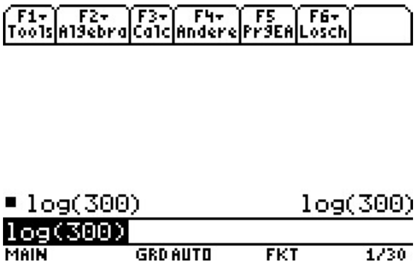
Ergebnis: 64

Zehnerlogarithmus

Beispiel: lg300 = ?

Eingabe: log(300) [ENTER] → Die Funktion log() ist über [CATALOG] erreichbar!

Display:



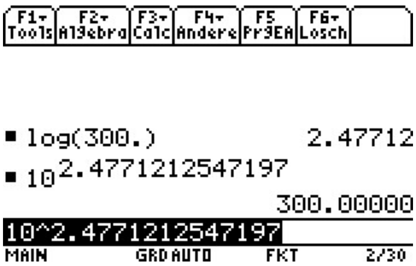
Ergebnis: log(300)

Näherung: [◆][≈] → 2.47712

Näherung direkt: log[(][3][0][0][.][)][ENTER]

Eingabe Kontrolle: [1][0][^][2][.][4][7][7][1][2][ENTER]

Display:



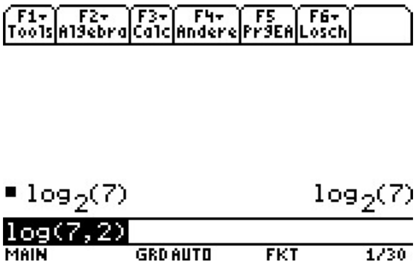
Ergebnis: 300

Beliebige Logarithmusbasis (nur mit Titanium)

Beispiel: $\log_2 7 = ?$

Eingabe: log(7,2) [ENTER] → Die Funktion log() ist über [CATALOG] erreichbar!

Display:



Ergebnis: $\log_2(7)$

Näherung: [◆][≈] → 2.80735

Näherung direkt: log[(][7][.][,][2][)][ENTER]

Eingabe Kontrolle: [2][^][2][.][8][0][7][3][5][ENTER]

Display:

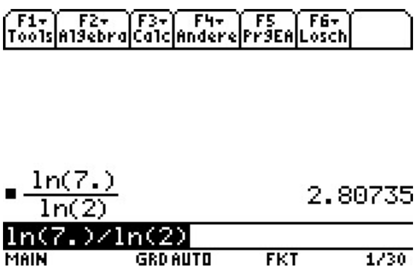
Ergebnis: 7

Hinweis: Mit dem normalen TI muss eine beliebige Basis über die Umrechnungsformel (siehe Seite 13) berechnet werden:

Beispiel: $\log_2 7 = ?$

Eingabe: [LN][(][7][.][)][÷][LN][(][2][)][ENTER]

Display:



8.10 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
172 (b, c, e, f, i)	60	Kontrolle mit TI üben
173 (alle)	60	Kontrolle mit TI üben
174 (alle)	60	Kontrolle mit TI üben
176 (alle)	61	Kontrolle mit TI üben
178 (alle)	61	
179 (e, f, h, i)	61	Kontrolle mit TI üben
180 (alle)	61	Kontrolle mit TI üben
181 (alle)	61	Kontrolle mit TI üben
183 (alle)	62	Kontrolle mit TI üben
184 (b, c, e, f)	62	Kontrolle mit TI üben
185 (e, f, h)	62	Kontrolle mit TI üben
186 (b, h)	63	Kontrolle mit TI üben
187 (c, e, f)	63	Kontrolle mit TI üben
188	63	Kontrolle mit TI üben
191 (alle)	64	Kontrolle mit TI üben
192 (b, c, d, f, h)	64	Kontrolle mit TI üben
193 (d, e, h, i)	65	Kontrolle mit TI üben
194 (a, b, c, e, f)	65	Kontrolle mit TI üben (D im Lösungsbuch falsch)
195 (b, c, f, h, j, l)	65	Kontrolle mit TI üben
196 (a, d)	65	Kontrolle mit TI üben
198 (a, b, g, i)	66	Kontrolle mit TI üben
201 (alle)	66	Kontrolle mit TI üben
202 (c, e, f)	66	Kontrolle mit TI üben
203 (alle)	67	Kontrolle mit TI üben
204 (alle)	67	Kontrolle mit TI üben

8.11 Exponentialgleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte im Exponenten einer Potenz vorkommt, heissen Exponentialgleichungen. Exponentialgleichungen lassen sich durch Logarithmieren lösen, wenn auf der linken und rechten Seite der Gleichung logarithmierbare Terme vorliegen.

Falls sich beide Seiten der Gleichung einfach in die Form $a^x = a^y$ umformen lassen, kann die Unbekannte auch durch «Gleichsetzen der Exponenten» bestimmt werden:

$$\boxed{a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad (a > 0,\ a \neq 1)}$$ Gleichsetzen der Exponenten

Beispiel 1 (Variante mit Logarithmieren)

Lösen Sie die Gleichung $4^{3x-3} = 8^x$ nach x auf. G = $\mathbb{R}$.

1. Definitionsbereich bestimmen $\quad D = \mathbb{R}$
2. Gleichung logarithmieren $\quad \lg\left(4^{3x-3}\right) = \lg\left(8^x\right)$
3. Potenzgesetz anwenden $\quad (3x-3)\cdot\lg 4 = x\cdot\lg 8$
4. Klammern wegschaffen (ausmultiplizieren) $\quad 3x\cdot\lg 4 - 3\cdot\lg 4 = x\cdot\lg 8$
5. alle Terme mit x auf eine Seite schaffen $\quad 3x\cdot\lg 4 - x\cdot\lg 8 = 3\cdot\lg 4$
6. x ausklammern $\quad x\cdot(3\cdot\lg 4 - \lg 8) = 3\cdot\lg 4$
7. x isolieren $\quad x = \dfrac{3\cdot\lg 4}{3\cdot\lg 4 - \lg 8} = \underline{2}$
8. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung $\quad 4^{3\cdot 2-3} = 8^2$

   $4^3 = 8^2$

   $64 = 64 \quad (w)$
9. Lösungsmenge $\quad L = \underline{\underline{\{2\}}}$

Beispiel 1 (Variante mit Gleichsetzen der Exponenten)

Lösen Sie die Gleichung $4^{3x-3} = 8^x$ nach x auf. G = $\mathbb{R}$.

1. Definitionsbereich bestimmen $\quad D = \mathbb{R}$
2. Gleichung auf gleiche Basis umformen $\quad \left(2^2\right)^{3x-3} = \left(2^3\right)^x$
3. Potenzgesetz anwenden $\quad 2^{6x-6} = 2^{3x}$
4. Exponenten gleichsetzen $\quad 6x - 6 = 3x$
5. x isolieren $\quad 3x = 6$
6. x bestimmen $\quad x = \frac{6}{3} = \underline{2}$
7. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung
$$4^{3\cdot 2-3} = 8^2$$
$$4^3 = 8^2$$
$$64 = 64 \quad (w)$$
8. Lösungsmenge $\quad L = \underline{\underline{\{2\}}}$

Fazit:

Falls es eine gemeinsame Basis gibt oder durch einfache Umformung eine gemeinsame Basis geschaffen werden kann, dann ist diese Methode sehr einfach und schnell! Es lohnt sich zuerst die Gleichung auf «gemeinsame Basis» zu untersuchen (nicht drauflos rechnen…)!

Beispiel 2

Lösen Sie die Gleichung $6^{3x}=12$ nach x auf. G = $\mathbb{R}$.

1. Definitionsbereich bestimmen	$D=\mathbb{R}$
2. Gleichung logarithmieren	$\lg\left(6^{3x}\right)=\lg 12$
3. Potenzgesetz anwenden	$3x\cdot\lg 6=\lg 12$
4. x isolieren	$3x=\frac{\lg 12}{\lg 6}=1.3869$
5. x bestimmen	$x=\frac{1.3869}{3}=\underline{0.4623}$
6. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung	$6^{3\cdot 0.4623}=12$ $12=12 \quad (w)$
7. Lösungsmenge	$L=\underline{\underline{\{0.4623\}}}$

Beispiel 3

Lösen Sie die Gleichung $0.75^{5x-14} = 0.5625^{x-1}$ nach x auf. G = $\mathbb{R}$.

1. Definitionsbereich bestimmen — $D = \mathbb{R}$

2. Gleichung logarithmieren — $\lg\left(0.75^{5x-14}\right) = \lg\left(0.5625^{x-1}\right)$

3. Potenzgesetz anwenden — $\underbrace{(5x-14)}_{\text{Klammer notwendig}} \cdot \lg 0.75 = \underbrace{(x-1)}_{\text{Klammer notwendig}} \cdot \lg 0.5625$

4. geteilt durch $\lg 0.75$ — $5x - 14 = (x-1) \cdot \underbrace{\frac{\lg 0.5625}{\lg 0.75}}_{\text{ausrechnen}} = (x-1) \cdot 2$

5. x isolieren — $5x - 2x = 14 - 2$

6. x bestimmen — $x = \frac{12}{3} = \underline{4}$

7. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung — $0.75^{5 \cdot 4 - 14} = 0.5625^{4-1}$

   $0.1780 = 0.1780 \quad (w)$

8. Lösungsmenge — $L = \underline{\underline{\{4\}}}$

Beispiel 4

Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{a^{x-3}} = \sqrt[3]{a^{x+2}}$ nach x auf. G = ℝ, a > 0 und a ≠ 1.

1. Definitionsbereich bestimmen $D = \mathbb{R}$

2. Wurzel als Potenz schreiben $a^{\frac{x-3}{2}} = a^{\frac{x+2}{3}}$

3. Exponenten gleichsetzen $\frac{x-3}{2} = \frac{x+2}{3}$

4. Brüche wegschaffen $3x - 9 = 2x + 4$

5. x isolieren $x = \underline{13}$

6. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung
$$\sqrt{a^{13-3}} = \sqrt[3]{a^{13+2}}$$
$$\sqrt{a^{10}} = \sqrt[3]{a^{15}}$$
$$a^5 = a^5 \quad (w)$$

7. Lösungsmenge $L = \underline{\underline{\{13\}}}$

8.12 Übungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. G = ℝ.

1. $10^{3+2x} = 7^{1-x}$

2. $\sqrt[x+3]{2^{x+11}} = \sqrt[x+5]{2^{2x+1}}$

3. $x^{-3+\lg x} = 0.01$ BM-Prüfung, Frauenfeld 1996

4. $3^{2x+1} - 5^{x-1} = 3^{2x+3} - 5^{x+1}$ BM-Prüfung, Uri 1999

8.13 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
359 (a, c, d, f)	118	Kontrolle mit TI üben
360 (alle)	118	Kontrolle mit TI üben
361 (alle)	118	Kontrolle mit TI üben
362 (b, c)	118	Kontrolle mit TI üben
363 (a, c, e)	118	Kontrolle mit TI üben
364 (a, b, c, d)	118	Kontrolle mit TI üben
366	118	Kontrolle mit TI üben
368	119	Kontrolle mit TI üben
369 (für Elektrofachleute…)	119	Kontrolle mit TI üben
370	120	Kontrolle mit TI üben

8.14 Logarithmische Gleichungen (Logarithmengleichungen)

Gleichungen, in denen die Unbekannte als Argument des Logarithmus vorkommt, heissen logarithmische Gleichungen. Zur Lösung von logarithmischen Gleichungen muss oft auf die Grundformel zurückgegriffen werden oder beide Seiten werden exponiert. Das Umformen mit der Grundformel und das Exponieren können zu einer **nicht äquivalenten Gleichung** führen. Es können Scheinlösungen entstehen. Um **Scheinlösungen auszuschliessen**, muss bei **logarithmischen Gleichungen unbedingt die Probe durchgeführt** werden.

Falls sich beide Seiten der Gleichung einfach in die Form $\log_a x = \log_a y$ umformen lassen, kann die Unbekannte auch durch «Gleichsetzen der Numeri» bestimmt werden:

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0)}$$

Gleichsetzen der Numeri

Beispiel 1 (Variante mit Grundformel)

Lösen Sie die Gleichung $\lg(3x+2) = 0.75$ nach x auf. G = R.

1. Definitionsbereich bestimmen $\qquad D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > -\frac{2}{3} \right\}$
2. Grundformel anwenden $\qquad 10^{0.75} = 3x + 2$
3. Potenzwert ausrechnen $\qquad 5.6234 = 3x + 2$
4. x isolieren $\qquad 3.6234 = 3x$
5. x berechnen $\qquad x = \frac{3.6234}{3} = \underline{1.2078}$
6. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung $\qquad \lg(3 \cdot 1.2078 + 2) = 0.75$

   $0.75 = 0.75 \quad (w)$
7. Lösungsmenge $\qquad L = \underline{\underline{\{1.2078\}}}$

Beispiel 1 (Variante mit Exponieren)

Lösen Sie die Gleichung $\lg(3x+2)=0.75$ nach x auf. G = $\mathbb{R}$.

1. Definitionsbereich bestimmen	$D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle\|\, x>-\frac{2}{3}\right\}$
2. Exponieren zur Basis 10 $\left(\text{es gilt } 10^{\lg a}=a\right)$	$10^{\lg(3x+2)}=\underbrace{10^{\log_{10}(3x+2)}}_{3x+2}=10^{0.75}$
3. Potenzwert ausrechnen	$3x+2=5.6234$
4. x isolieren	$3x=3.6234$
5. x berechnen	$x=\frac{3.6234}{3}=\underline{1.2078}$
6. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung	$\lg(3\cdot 1.2078+2)=0.75$ $0.75=0.75\quad(w)$
7. Lösungsmenge	$L=\underline{\underline{\{1.2078\}}}$

Beispiel 2

Lösen Sie die Gleichung $\lg x + \lg 3 = \lg(1+x)$ nach x auf. G = R.

1. Definitionsbereich bestimmen
   $x > 0 \quad \wedge \quad x > -1$
   $D = \{x | x > 0\}$

2. Produktregel anwenden
   $\underbrace{\lg(x \cdot 3)}_{\lg x + \lg 3} = \lg(1+x)$

3. Numeri gleichsetzen
   $3x = 1 + x$

4. x isolieren
   $2x = 1$

5. x berechnen
   $x = \underline{\frac{1}{2}}$

6. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung
   $\lg\frac{1}{2} + \lg 3 = \lg\left(1 + \frac{1}{2}\right)$
   $0.1761 = 0.1761 \quad (w)$

7. Lösungsmenge
   $L = \underline{\underline{\left\{\frac{1}{2}\right\}}}$

Beispiel 3

Lösen Sie die Gleichung $\log_8(4x) = \log_2 x$ nach x auf. G = R.

1. Definitionsbereich bestimmen	$D = \{x \mid x > 0\}$
2. Basiswechsel auf der **linken** Seite	$\log_8(4x) = \dfrac{\log_2(4x)}{\log_2 8} \qquad (1)$
3. (1) in ursprüngliche Gleichung einsetzen	$\dfrac{\log_2(4x)}{\log_2 8} = \log_2 x$
4. $\log_2 8$ umformen: $\log_2 8 = 3$	$\dfrac{\log_2(4x)}{3} = \log_2 x \qquad \vert \cdot 3$
5. Bruch wegschaffen	$\log_2(4x) = 3 \cdot \log_2 x$
6. Potenzregel auf rechter Seite anwenden	$\log_2(4x) = \log_2(x^3)$
7. Numeri vergleichen	$4x = x^3$
8. alle Terme mit x auf eine Seite schaffen	$0 = x^3 - 4x$
9. Faktorzerlegung	$0 = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$
10. Lösungen bestimmen	$\underbrace{x_1 = 0}_{\notin D},\ x_2 = 2,\ \underbrace{x_2 = -2}_{\notin D}$
11. Übereinstimmung mit Definitionsbereich prüfen	$x_2 = \underline{2} \in D$
12. Kontrolle mit ursprünglicher Gleichung	$\log_8(4 \cdot 2) = \log_2 2$ $\log_8 8 = \log_2 2$ $1 = 1 \quad (w)$
13. Lösungsmenge	$L = \underline{\underline{\{2\}}}$

8.15 Übungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. G = $\mathbb{R}$.

1. $\dfrac{\lg x + \lg\left(2x^2\right)}{\lg\left(\dfrac{1}{x}\right) + \lg\left(\dfrac{2}{x^2}\right)} = 2$ BM-Prüfung, Bern 1996

2. $\lg x + \lg 2 = \lg(x+1) - 1$ BM-Prüfung, Wetzikon 1996

3. $x^{\ln x} = e^4$ BM-Prüfung, Wetzikon 1996

4. $\log_5 x = 6 - \log_x \left(5^5\right)$ BM-Prüfung, Wetzikon 1996

5. $10^{\frac{\lg\left(x^2\right)}{\lg 100}} = \log_p\left(p^3\right)$ BM-Prüfung, Thun 1996

6. $\lg(1-3x)+\lg(4-5x)=2\cdot\lg(12x-2)-1$ Landwirtschaftliche BM, Zollikofen

7. $\lg(x+2)+\lg(x-2)=0$ Frommenwiler, Aufgabe 375 d

8. $(1+\ln x)\cdot\ln x=2$ (mit Substitution lösen) Frommenwiler, Aufgabe 376 e

9. $\log_2 x - \lg x = 3.5$ BM-Prüfung, Uri 1999

10. $(\lg x)\cdot(\lg x-3)+2=0$ BM-Prüfung, Uri 2000

11. $x^{2+\log_5 x} = 5^3$ BM-Prüfung, Uri 2000

12. $x^{\lg x} = x^4$ BM-Prüfung, Wetzikon 2000

13. $\log_5 x = \dfrac{\log_{125}\left(x^3\right)}{\log_{25} x}$ BM-Prüfung, Wetzikon 2000

14. $\lg(0.7x) + 1 = 2 \cdot \lg x$ BM-Prüfung, Wetzikon 1999

15. $\frac{x}{2} \cdot \lg \sqrt{x} = \lg\left(x^{\sqrt{x}}\right)$ BM-Prüfung, Wetzikon 1999

16. $(\lg x)^2 - \lg x = \ln\left(e^2\right)$ BM-Prüfung, Wetzikon 1999

8.16 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
371 (d, e, f)	122	Kontrolle mit TI üben
372 (c, d)	122	Kontrolle mit TI üben
374 (a, c, e)	123	Kontrolle mit TI üben
375 (a, c, h)	123	Kontrolle mit TI üben
376 (a, c)	123	Kontrolle mit TI üben
377 (b, c, d)	123	Kontrolle mit TI üben
378 (a, b)	123	Kontrolle mit TI üben