1 Mengenlehre

1.1 Begriff der Menge

Unter einer Menge versteht man die Zusammenfassung von voneinander **unterscheidbaren** Dingen (Elementen) zu einem Ganzen.
Eine Menge kann in aufzählender Form, mithilfe eines Mengenbildes (Venn-Diagramm) oder in beschreibender Form angegeben werden. Dabei bezeichnen wir Mengen mit grossen Buchstaben, die Elemente von Mengen meist mit kleinen Buchstaben.

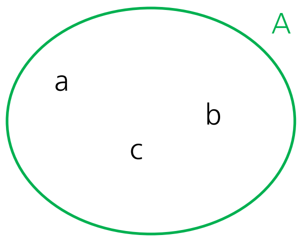
Beispiel

Aufzählende Form

$A = \{a, b, c\}$

a ist Element von A (man schreibt: $a \in A$)
b ist Element von A (man schreibt: $b \in A$)
c ist Element von A (man schreibt: $c \in A$)
d ist **nicht** Element von A (man schreibt: $d \notin A$)

Mengenbild (Venn-Diagramm)

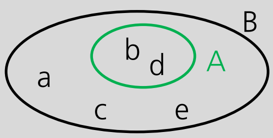


1.2 Beziehungen zwischen Mengen

Teilmenge

A ist eine Teilmenge von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist.

man schreibt: $A \subset B$



Beispiel

$A = \{b, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ somit gilt: $A \subset B$

Achtung

Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst:
$A \subset A$

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge:
$\underbrace{\{\ \}}_{\text{leere Menge}} \subset A$ und $\{\ \} \subset B$

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

man schreibt: $A = B$

Beispiel

$A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ somit gilt: $A = B$

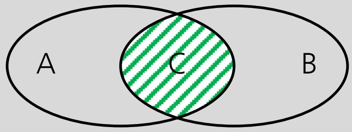
1.3 Verknüpfungen von Mengen (Mengenoperationen)

Durchschnittsmenge

Die Durchschnittsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A **und** zu B gehören.

$$C = A \cap B = \left\{ x \middle| x \in A \underset{\text{logische 'und'}}{\wedge} x \in B \right\}$$

man liest:
«C gleich A geschnitten mit B ist die Menge aller x für die gilt, x ist Element von A **und** x ist Element von B»



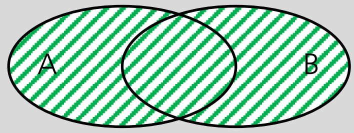
$C = A \cap B$

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A **oder** zu B **oder** zu beiden Mengen gehören.

$$C = A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \underset{\text{logische 'oder'}}{\vee} x \in B \right\}$$ [1]

man liest:
«C gleich A vereinigt mit B ist die Menge aller x für die gilt, x ist Element von A **oder** x ist Element von B»



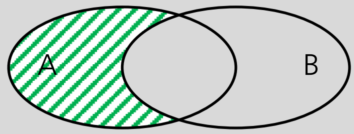
$C = A \cup B$

Differenzmenge

Die Differenzmenge $C = A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A, die **nicht** zu B gehören.

$$C = A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \underset{\text{logische 'und'}}{\wedge} x \notin B \right\}$$

man liest:
«C gleich A **ohne** B ist die Menge aller x für die gilt, x ist Element von A und x ist nicht Element von B»



$C = A \setminus B$

---

[1] Das logische Zeichen $\vee$ (für „oder“) bedeutet „oder“ im nicht ausschliessenden Sinn. Die Aussage „Neriah ruft an oder schreibt einen Brief“ lässt im nicht ausschliessenden Sinn drei Möglichkeiten zu:
1. Neriah ruft an, schreibt aber keinen Brief.
2. Neriah ruft nicht an, schreibt aber einen Brief.
3. Neriah ruft an und schreibt einen Brief.

Rechenregeln (Schaltalgebra)

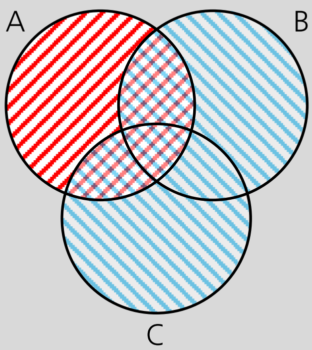
Logische Verknüpfungen lassen sich mit einer besonderen Art von Mathematik darstellen. Man spricht von der Schaltalgebra, die aus der Booleschen Algebra hervorgeht. Aufgrund des binären Zahlensystems kennt die Schaltalgebra nur zwei Konstanten: die 0 und die 1.

Es gelten folgenden Regeln (Vorrangigkeit und Bindungsstärke):

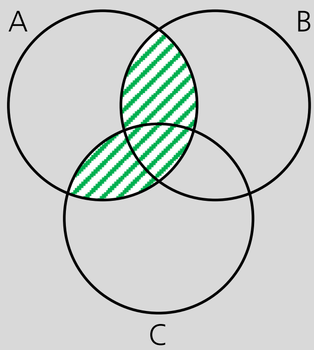
a. UND bindet stärker als ODER
b. Klammern binden stärker als UND
c. Negationszeichen binden stärker als Klammern (siehe Kapitel 1.8)

Auf die Mengenlehre angewandt, bedeutet dies: $A \cap (B \cup C) \neq A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$

Beweis

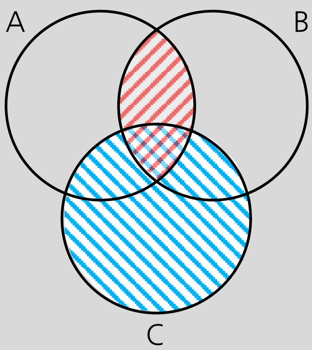


→

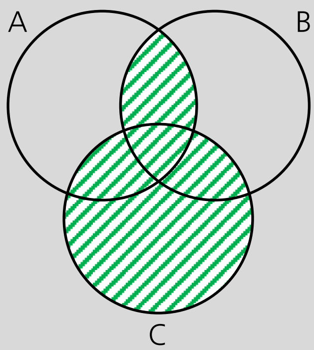


$\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{\text{1. und 2. Schritt}}$ = $\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{\text{3. Schritt}}$

anschaulich: grün = rot «geschnitten» mit hellblau



→



$\underbrace{A \cap B \cup C}_{\substack{\text{1. und 2. Schritt} \\ \text{(UND stärker als ODER)}}}$ = $\underbrace{A \cap B \cup C}_{\text{3. Schritt}}$

anschaulich: grün = rot «vereinigt» mit hellblau

Fazit

Das Resultat kann von der Klammersetzung abhängen.
Legen Sie deshalb die Reihenfolge der Mengenoperationen **eindeutig** mit Klammern fest!

Merke

Leere Menge

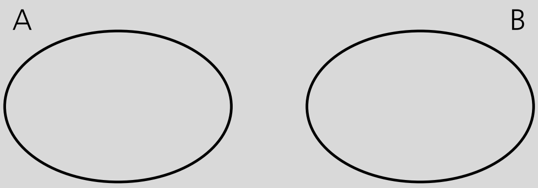
Die Menge, die **kein Element** besitzt, heisst leere Menge. Man bezeichnet sie mit $\emptyset$ (durchgestrichene Null). Die Schreibweise { } ist nach DIN nicht vorgesehen. Wir werden die Schreibweise { } trotzdem verwenden. Diese Schreibweise wirkt einem Missverständnis entgegen: Die leere Menge ist nicht *nichts*, sondern *etwas*, das nichts enthält.

Für die leere Menge treffen wir folgende Vereinbarungen:
- Die leere Menge gehört zu den endlichen Mengen.
- Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge.

Unterscheiden Sie: { } → Leere Menge, die kein Element enthält.
{0} → Menge mit dem einzigen Element Null.

Elementfremd (disjunkt)

Zwei Mengen A und B heissen **elementfremd (disjunkt)**, falls gilt: $A \cap B = \{\ \}$.



$$A \cap B = \{\ \}$$

Eselsbrücke für $\wedge$

Als Eselsbrücke für das logische «UND» können Sie sich für das Symbol $\wedge$ den Anfangsbuchstaben A für das englische «**A**ND» merken.

Verwechslung von \ mit /

Verwechseln Sie das Symbol für «ohne» nicht mit dem Symbol für die Division:
\ nicht mit / verwechseln!

Unterschied $\in$ und $\subset$

Bei der Schreibweise $\in$ bzw. $\notin$ steht links immer ein Element, rechts wird die Menge angegeben! Bei der Schreibweise $\subset$ bzw. $\not\subset$ steht links und rechts immer eine Menge:

Beispiele: $\underset{\text{Element}}{5} \in \underset{\text{Menge}}{A}$ bzw. $\underset{\text{Menge}}{\{2,\ 3\}} \subset \underbrace{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}}_{\text{Menge}}$

Ausnahme, wenn A eine Menge von Mengen ist: $A = \{\{1\},\ \{2\}, \ldots\}$ → $\{2\} \in A$ ist korrekt!

Arbeitstechnik

Verwenden Sie Farben wenn Sie Mengen schraffieren müssen. Markieren Sie die einzelnen Arbeitsschritte mit unterschiedlichen Farben. Ein Beispiel sehen Sie auf der Vorderseite.

Die Menge $A \cap (B \cup C)$ wird in drei Arbeitsschritten schraffiert!

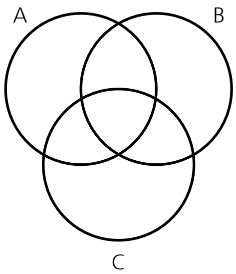
1.4 Übungen

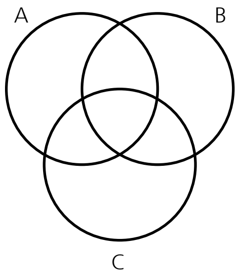
1. Geben Sie alle Teilmengen der Menge A = {a, b, c} an.
   Sie erhalten damit die **Menge aller Teilmengen** von A (siehe 1.11 Potenzmenge).

2. Zeigen Sie anhand von Beispielen: Eine Menge von n Elementen besitzt 2^n Teilmengen.

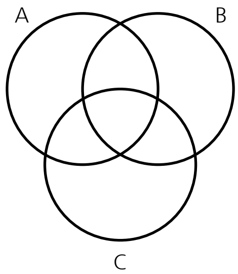
3. Ein Vater hat vier Kinder: Anna, Berta, Cyril und Doris. Er kann einen Nachmittag allein (im Wirtshaus), mit einem seiner Kinder, mit zweien, mit dreien oder mit allen Kindern verbringen. Auf wie viele Arten kann er den Nachmittag verbringen?

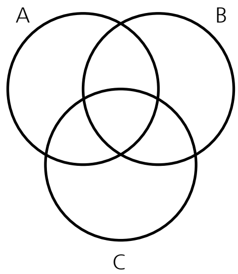
4. Schraffieren Sie die angegebenen Mengen.



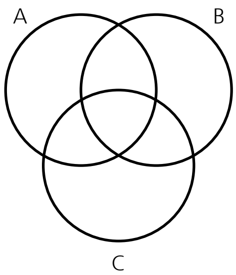


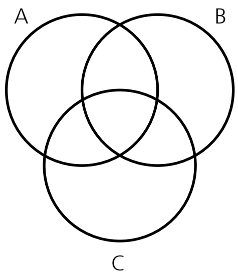
$(A \cap B) \cup C \quad = \quad (A \cup C) \cap (B \cup C)$



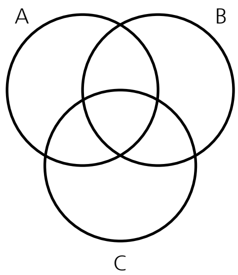


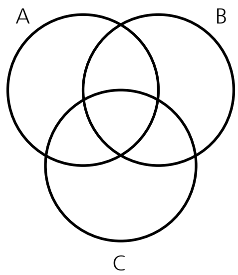
$(A \cup B) \cap C \quad = \quad (A \cap C) \cup (B \cap C)$





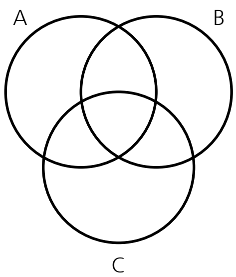
$(A \cup B) \cup C \quad = \quad A \cup (B \cup C)$



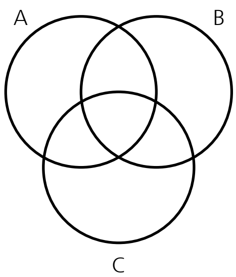


$(A \cap B) \cap C \quad = \quad A \cap (B \cap C)$

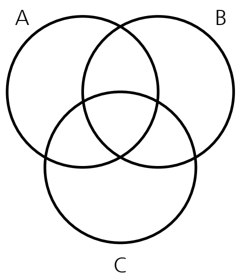
5. Schraffieren Sie die angegebenen Mengen.



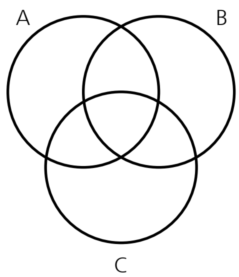
$(A \setminus B) \cup C$



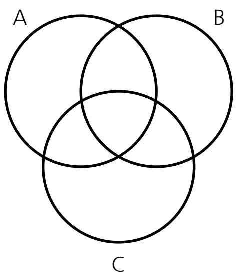
$(A \setminus B) \cap C$



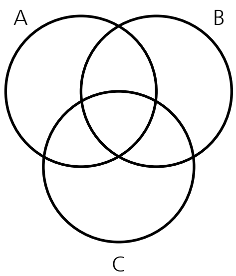
$A \setminus (B \cup C)$



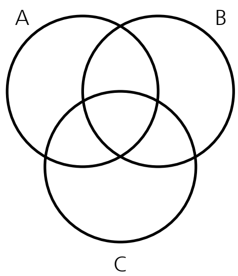
$A \setminus (B \cap C)$



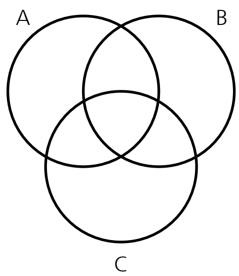
$A \cup (B \setminus C)$



$A \cap (B \setminus C)$

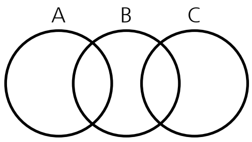


$(A \setminus B) \setminus C$

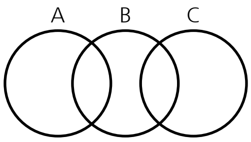


$A \setminus (B \setminus C)$

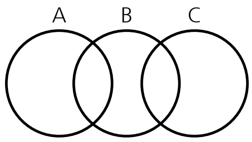
6. Schraffieren Sie die angegebenen Mengen.



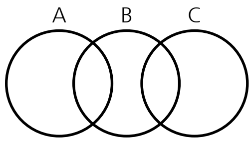
$(A \cup B) \cup C$



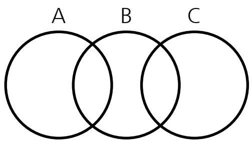
$(A \cap B) \cap C$



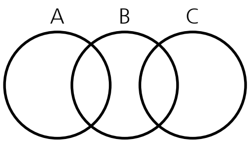
$(A \cup B) \cap C$



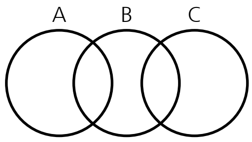
$(A \cap B) \cup C$



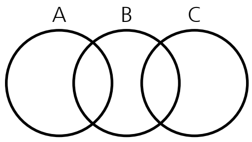
$(A \cup C) \cap (B \cup C)$



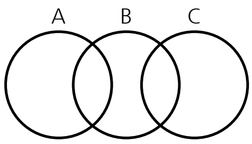
$(A \cap C) \cup (B \cap C)$



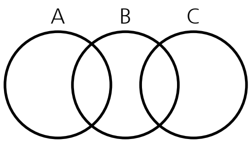
$(B \setminus A) \cup C$



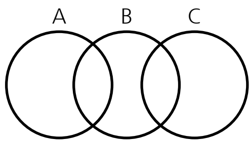
$(C \setminus B) \cup A$



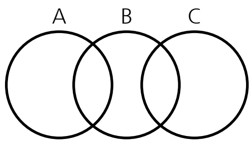
$(C \setminus B) \cap A$



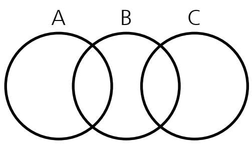
$(A \cup C) \setminus B$



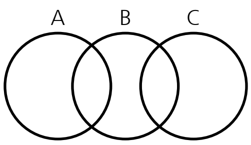
$A \cup (C \setminus B)$



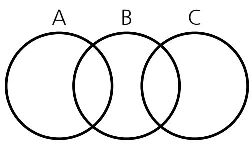
$A \cap (C \setminus B)$



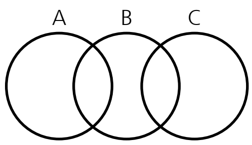
$(A \setminus B) \cup C$



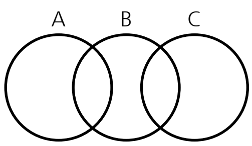
$(A \setminus B) \cap C$



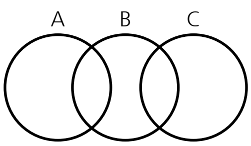
$A \setminus (B \cup C)$



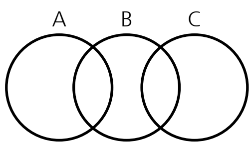
$A \setminus (B \cap C)$



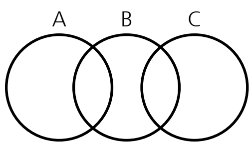
$A \cup (B \setminus C)$



$A \cap (B \setminus C)$



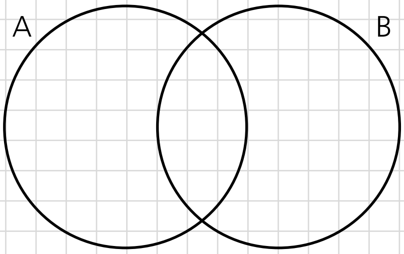
$(A \setminus B) \setminus C$



$A \setminus (B \setminus C)$

7. Gegeben sind vier Mengen A = {a, b, d, f}, B = {c, d, e, f, g}, C = {d, e, f}, D = {i, j, k}.

a. Bilden Sie die folgenden Mengen: $A \cup B$, $B \cup A$, $A \cap B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$
Sie sollen dabei erkennen: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, jedoch $A \setminus B \neq B \setminus A$
Man sagt: Für den Durchschnitt und für die Vereinigung zweier Mengen gilt das **Kommutativgesetz** (Vertauschungsgesetz).
Tipp: Elemente zuerst in Venn-Diagramm eintragen!



$A \cup B =$

$B \cup A =$

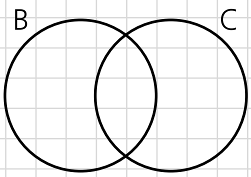
$A \cap B =$

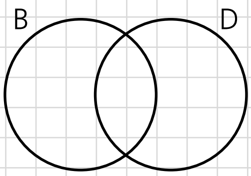
$B \cap A =$

$A \setminus B =$

$B \setminus A =$

b. Bilden Sie die folgenden Mengen: $B \setminus C$, $C \setminus B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B \cup D$, und $B \cap D$





$B \setminus C =$

$C \setminus B =$

$B \cup C =$

$B \cap C =$

$B \cup D =$

$B \cap D =$

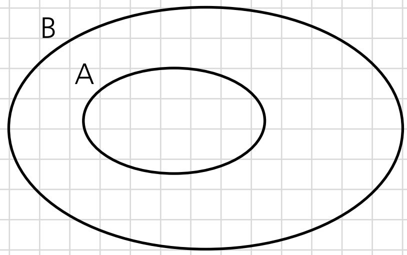
c. Berechnen Sie: $A \cup A = ?$, $A \cap A = ?$ und $A \setminus A = ?$

d. Was ist richtig, was ist falsch? Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

$b \in A$	☐ richtig	☐ falsch	$\{b\} \in A$	☐ richtig	☐ falsch
$A \subset B$	☐ richtig	☐ falsch	$C \subset B$	☐ richtig	☐ falsch
$A \not\subset B$	☐ richtig	☐ falsch	$\{\ \} \not\subset B$	☐ richtig	☐ falsch
$A \subset A$	☐ richtig	☐ falsch	$B \subset C$	☐ richtig	☐ falsch

e. Berechnen Sie: $A \cup \{\ \} = ?$, $A \cap \{\ \} = ?$, $A \setminus \{\ \} = ?$, $\{\ \} \setminus A = ?$

8. Ergänzen Sie korrekt. Aus $A \subset B$ folgt:



$A \cup B =$

$A \cap B =$

$A \setminus B =$

9. Setzen Sie das passende Zeichen ein: $\subset$, $\not\subset$, $\in$, $\notin$ oder $=$

a. $1 \ldots\ldots \{1, 2, 3\}$ b. $\{1, 2\} \ldots\ldots \{1, 2, 3\}$ c. $\{1\} \ldots\ldots \{1, 2, 3\}$

d. $\{1, 2, 3\} \ldots\ldots \{1, 3, 2\}$ e. $0 \ldots\ldots \{1, 2, 3\}$ f. $\{0\} \ldots\ldots \{0, 1, 2, 3\}$

g. $0 \ldots\ldots \{0, 1, 2, 3\}$ h. $\{\,\} \ldots\ldots \{\{\,\}, \{1\}, \{2, 3\}\}$ i. $\{\,\} \ldots\ldots \{1, 2, 3\}$

10. Welche je zwei der angegebenen Mengen sind zueinander disjunkt?
$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{a, b\}$

1.5 Übungen (alte BM-Prüfungen)

1. *Luzern 1993*
   Der Hersteller von 3 Waschmitteln A, B und C stellt durch Umfrage bei 250 Haushalten fest: 15 Haushalte verwenden alle drei Waschmittel, 35 Haushalte Waschmittel A und B, 20 Haushalte B und C, 25 Haushalte A und C, 40 Haushalte nur B, 10 Haushalte nur C, 95 Haushalte verwenden keines der drei Waschmittel.

   a. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm
   b. Wie viele Haushalte verwenden nur Waschmittel A?
   c. In welchem Verhältnis sind die drei Waschmittel anzubieten?

Geg:

Ges:

Lösung:

2. *Brig 1998*
   Von den SchülerInnen einer Klasse spielen 6 kein Instrument. 10 SchülerInnen spielen Violine und 7 spielen Klavier. Ferner gibt es 12 FlötenspielerInnen in der Klasse, von denen alle mit Ausnahme von dreien noch mindestens ein weiteres Instrument spielen, nämlich 6 Violine und 5 Klavier. Von den ViolinistInnen spielen 3 kein weiteres Instrument. Wie viele SchülerInnen…

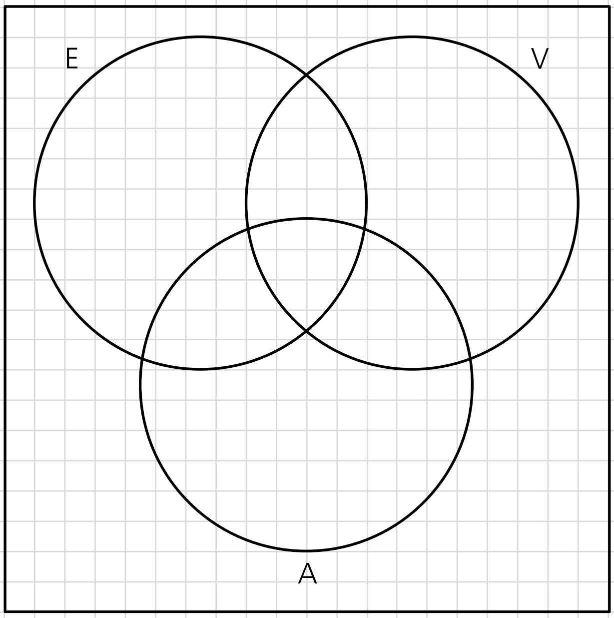
   a. …zählt die Klasse?
   b. …spielen nur Klavier?
   c. …spielen alle drei Instrumente?
   d. …spielen Violine und Klavier?

Geg:

Ges:

Lösung:

3. *Biel 1999*
In einem Handelsbetrieb arbeiten insgesamt 130 Personen, hauptsächlich in den Bereichen Einkauf (E), Verkauf (V) und Administration (A). 16 Angestellte sind auf verschiedenen Spezialgebieten, z. B. EDV, Chauffeure, Kantine etc., tätig.
Aufgrund ihrer Ausbildung können 80 Personen in der Administration, 50 Personen im Verkauf und 40 Personen im Einkauf eingesetzt werden.
Kenntnisse in Administration *und* Verkauf haben 24 Personen, 8 Personen davon auch im Einkauf. 14 Personen kennen sich im Einkauf *und* Verkauf aus.
Tragen Sie die entsprechenden Angaben in untenstehendes Venn-Diagramm ein und vervollständigen Sie das Mengendiagramm.



Geg:

Ges:

Lösung:

4. *Bern 2000 (*)*
Eine schulinterne Umfrage zeigt, dass von den erfassten Personen 42 keinen Sport treiben. 62 Befragte betätigen sich als Leichtathleten (L) und 49 spielen Rakett-Ballspiele (RB). 84 Befragte gaben an, Fussball (F) zu spielen, von denen alle ausser 21 noch mindestens eine weitere Sportart treiben, nämlich 40 Leichtathletik und 35 Rakett-Ballspiele. 20 Leichtathleten üben keine weitere Sportart aus. Stellen Sie die Bedingungen in einem Diagramm dar und beantworten Sie die folgenden Fragen:

a. Wie viele Personen wurden mit der Umfrage erfasst?
b. Wie viele Personen spielen nur Fussball oder nur Rakett-Ballspiele?
c. Für wie viele Personen trifft folgende Bedingung zu: $(RB \cap F) \setminus (L \cap F)$?

Geg:

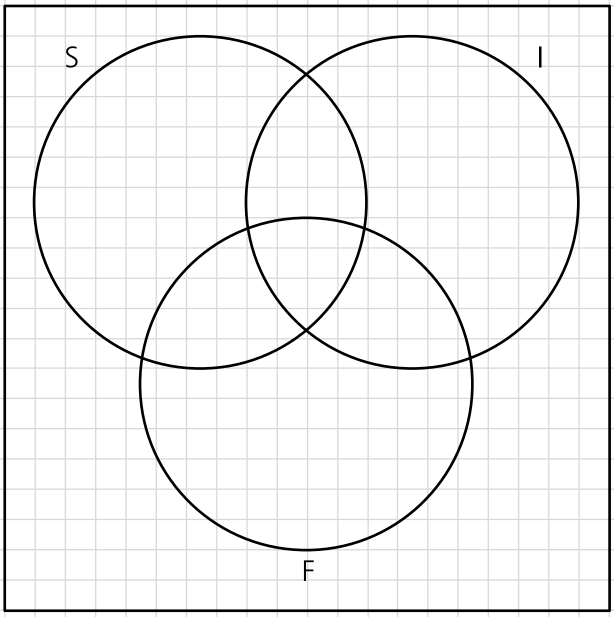
Ges:

Lösung:

5. *Luzern 1999 (*)*
Für die folgenden Teilaufgaben a. bis d. benutzen Sie bitte das untenstehende Venn-Diagramm. Dabei bedeuten die Mengen:

Personen mit guten Sprachkenntnissen in
spanisch = S,
italienisch = I,
französisch = F.

a. Für eine freie Stelle einer internationalen Firma bewerben sich 29 Personen. 15 Personen können gut spanisch, 10 italienisch und 4 sprechen alle drei Sprachen. 9 Personen sprechen mindestens italienisch und französisch. 8 BewerberInnen können nur spanisch. 3 Personen haben gute Spanisch- und Französisch-, aber keine guten Italienischkenntnisse. Es hat dreimal so viele BewerberInnen, die keine dieser Sprachen sprechen als BewerberInnen, die nur französisch sprechen.
Schreiben Sie die Zahl der entsprechenden BewerberInnen in die einzelnen Teilmengen ein und stellen Sie eine Gleichung auf, damit Sie die unbekannten Zahlen berechnen können.
b. Wie viele BewerberInnen sprechen französisch?
c. Wie viele BewerberInnen haben Kenntnisse in mindestens 2 dieser Sprachen?
d. Schraffieren Sie im Venn-Diagramm die Menge $(S \setminus F) \cup (I \cap F)$.



Geg:

Ges:

Lösung:

1.6 Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen N

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5, …
Sie wird wie folgt notiert:

$\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$ $\qquad$ $\mathbf{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$

Im Bereich der natürlichen Zahlen kann man unbeschränkt addieren und multiplizieren. Die Subtraktion und die Division führen in der Regel aus dem Bereich der natürlichen Zahlen hinaus.

$12 - 17 = ?$ das Ergebnis ist **keine** natürliche Zahl

$\frac{12}{7} = ?$ das Ergebnis ist **keine** natürliche Zahl

Die ganzen Zahlen Z

Die Menge der ganzen Zahlen ist die Menge mit den Elementen …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …
Sie wird wie folgt notiert:

$\mathbf{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

Im Bereich der ganzen Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren. Die Division führt in der Regel aus dem Bereich der ganzen Zahlen hinaus.

$\frac{12}{7} = ?$ das Ergebnis ist **keine** natürliche Zahl

Die rationalen Zahlen Q (Bruchzahlen)

Die Division zweier Zahlen ist in **Z** nicht immer ausführbar; sie erfordert daher eine Erweiterung des Zahlenraumes. Sie erfolgt durch die Einführung der Bruchzahlen oder kurz Brüche. Die Menge der rationalen Zahlen wird wie folgt notiert:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbf{Z} \underset{\text{und}}{\wedge} b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Im Bereich der rationalen Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren und dividieren. Lediglich das Wurzelziehen (und andere «höhere» Rechenoperationen) führt in der Regel aus dem Bereich der rationalen Zahlen hinaus.

$\sqrt{2} = ?$ das Ergebnis ist **keine** rationale Zahl

Jede Division führt entweder zu einer **endlichen** (d. h. die Division «geht auf») oder **periodischen** Dezimalzahl. Die Darstellung als Dezimalzahl lässt erkennen, dass diese Schreibweise nur eine Annäherung darstellt.

$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$ das Ergebnis ist eine **periodische** Dezimalzahl

Jede **endliche** oder **periodische Dezimalzahl** lässt sich als **Bruchzahl** schreiben.

Irrationale Zahlen I

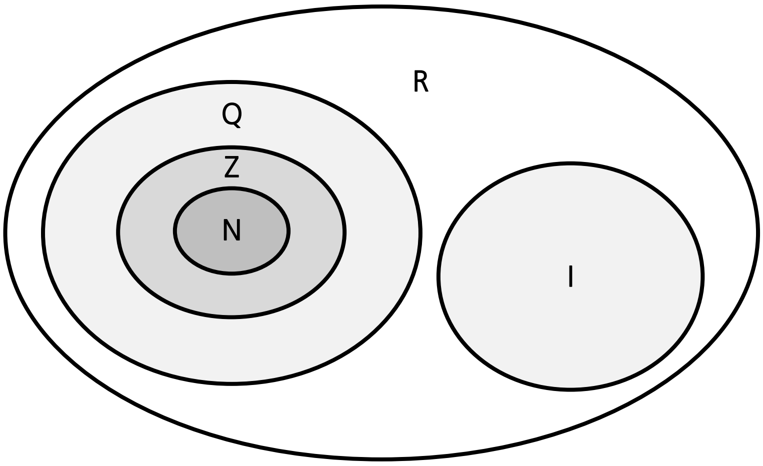
Die Menge der irrationalen Zahlen ist die Menge aller unendlichen, jedoch nicht periodischen Dezimalzahlen.

π, $\sqrt{2}$ oder 0,1 10 100 1000 10000 1...

Diese Zahlen lassen sich also **nicht als Bruchzahl** schreiben.

Reelle Zahlen R

Die Menge der reellen Zahlen enthält die rationalen und die irrationalen Zahlen: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.
Wie aus dem Venn-Diagramm ersichtlich ist, sind alle Zahlenmengen letztlich Teilmengen von **R**. Es gilt somit:



$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ und $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$

1.7 Grundmenge (Bezugsmenge)

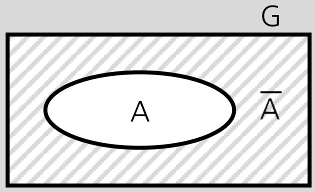
Vielfach ist es sinnvoll, eine Grundmenge G anzugeben. Das sind alle jene Dinge, die überhaupt in Betracht gezogen werden. Bei der Lösung von Gleichungen verwendet man **immer** eine Grundmenge G. Wenn man nicht eine spezielle Grundmenge angibt, dann wählt man in der Regel **R** als Grundmenge.

$G = \mathbb{N}$ bedeutet: Grundmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen
$G = \mathbb{Z}$ bedeutet: Grundmenge ist die Menge der ganzen Zahlen
$G = \mathbb{Q}$ bedeutet: Grundmenge ist die Menge der rationalen Zahlen

1.8 Komplementmenge (Negation)

Die Komplementmenge oder das Komplement einer Menge A ergänzt die Menge A zur Grundmenge.

man schreibt: $A \cup \underbrace{\overset{\text{Negationszeichen}}{\overline{A}}}_{\text{man liest: nicht A}} = G \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} = G \setminus A$



Beispiele

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

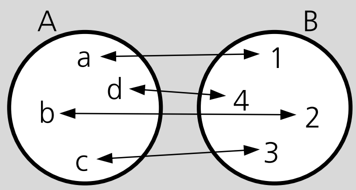
$G = \{x \in \mathbb{N} | x < 16\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 10\}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$G = \{a, b, c, \ldots, z\}$, $A = \{a, b, c, \ldots, p\}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} = \{q, r, s, t, \ldots, z\}$

1.9 Mächtigkeit einer Menge

Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn jedem Element von A eindeutig ein Element von B zugeordnet werden kann und umgekehrt.

man schreibt: $A \sim B$



Die beiden Mengen $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sind zwar **nicht gleich** $(A \neq B)$, sie sind **jedoch gleichmächtig**.

Bei endlichen Mengen ist die Mächtigkeit einer Menge **gleich der Anzahl ihrer Elemente**. Besteht die Menge A aus 4 Elementen, so schreibt man kurz $|A| = 4$.

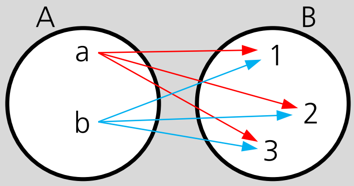
Achtung:

Die senkrechten Striche stehen für die Mächtigkeit und nicht für die Betragsfunktion!

1.10 Produktmenge (Pfeildiagramm) (*)

Unter der Produktmenge aus A und B versteht man die Menge **aller** Paare (x, y), wobei $x \in A$ und $y \in B$ ist. Zahlenpaare kann man auch in einem Koordinatensystem eintragen.

man schreibt: $A \underset{\text{Kreuz}}{\times} B$



Die Mächtigkeit von A x B ist gleich der Mächtigkeit von A multipliziert mit der Mächtigkeit von B: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Beispiel

$A = \{a,\ b\},\ B = \{1,\ 2,\ 3\} \quad \Rightarrow \quad C = A \times B = \{(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ (a,\ 3),\ (b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (b,\ 3)\}$

$|C| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$

Hinweis:
Innerhalb der **runden Klammern** müssen Sie auf die **Reihenfolge achten**: $(a,\ 1) \neq (1,\ a)$.
Innerhalb der geschweiften Klammer kommt es **nicht auf die Reihenfolge** an!

1.11 Potenzmenge (*)

Unter der Potenzmenge versteht man die Menge **aller Teilmengen** einer gegebenen Grundmenge. Man notiert die Potenzmenge von A meist als P(A).

Jede Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen: $|P(A)| = 2^n$

Beispiele

$A = \{a\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \{\{\ \},\ \{a\}\}$

$A = \{a,\ b\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \{\{\ \},\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\}$

Hinweis: Typische Anwendung → Schaltungssynthese in der Digitaltechnik

Frage: Wie viele verschiedene Kombinationen sind mit zwei Schaltern S_1 und S_2 möglich?
Lösung: $A = \{S_1,\ S_2\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \{\{\ \},\ \{S_1\},\ \{S_2\},\ \{S_1,\ S_2\}\}$

Eingänge		Ausgang
S_1	S_2	Z
aus	aus	?
aus	ein	?
ein	aus	?
ein	ein	?

Durch den Einsatz einer «Wahrheitstabelle» kann verhindert werden, dass gleiche Kombinationen mehrfach vorkommen, beziehungsweise einzelne Kombinationen vergessen werden!

1.12 Übungen

1. Setzen Sie ein Kreuz, falls die links angegebene Zahl eine natürliche Zahl, ganze Zahl, rationale Zahl etc. ist.

	natürliche Zahl	ganze Zahl	rationale Zahl	irrationale Zahl	reelle Zahl
7					
-3					
$\sqrt{3}$					
$0.\overline{34}$					
$\frac{3}{4}$					

2. Gegeben sind $G = \{1, 4, 9, \ldots, 100\}$ und $A = \{4, 16, 25, 81, 100\}$. Bestimmen Sie $\overline{A}$.

3. Gegeben sind $G = \mathbf{N}$ und $A = \text{Menge der geraden Zahlen}$. Bestimmen Sie $\overline{A}$.

4. Geben Sie die Mächtigkeit für jede der Mengen A, B, C, D und E an:
   $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $D = \{0\}$ $E = \{\ \}$
   Welche dieser Mengen sind gleichmächtig?

5. (*) Gegeben sind $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{u, v, w\}$. Bilden Sie A x B und B x A.
   Welche Mächtigkeit haben A x B und B x A?

6. (*) Gegeben sind $A = \{a, b, c, d, e\}$ und $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
   Welche Mächtigkeit hat A x B?

7. Gegeben ist $A = \{a, b, c, d\}$.
   a. Bilden Sie die Menge aller Teilmengen von A.
   b. Welche Mächtigkeit hat diese Menge?

8. Wie viele Teilmengen hat eine Menge mit der Mächtigkeit 10?

9. (*) Gegeben ist $A = \{a, b, c\}$. Bilden Sie A x A.

10. (*) Geben Sie wenigstens fünf Elemente der Menge **Z** x **Z** an.

11. Vergewissern Sie sich, dass Sie folgende Begriffe kennen:
    Menge, Element, Gleichheit von Mengen, Teilmenge, Menge aller Teilmengen, Durchschnitt, Vereinigung, disjunkt, Differenzmenge, Mächtigkeit einer Menge, Gleichmächtigkeit, (*) Produktmenge, **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**.

12. Welche natürlichen Zahlen zwischen 45 und 55 geben durch 6 dividiert höchstens 9?

13. Welche natürlichen Zahlen ergeben zu 7 addiert mehr als 12 und mit 7 multipliziert weniger als 63?

1.13 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite alt/neu (Algebra und Datenanalyse)	Bemerkungen
A8 (a, c und d)	250/276	
A12 (a und c)	251/277	alle möglichen Teilmengen
A16 (c und d)	251/277	
A18 (a und b)	252/278	alle möglichen Teilmengen
A20 (a bis d)	252/278	Venn-Diagramm zeichnen
A21 (a bis g)	253/279	
A22 (a bis f)	253/279	mehrere Lösungen möglich
A23	254/280	Venn-Diagramm zeichnen