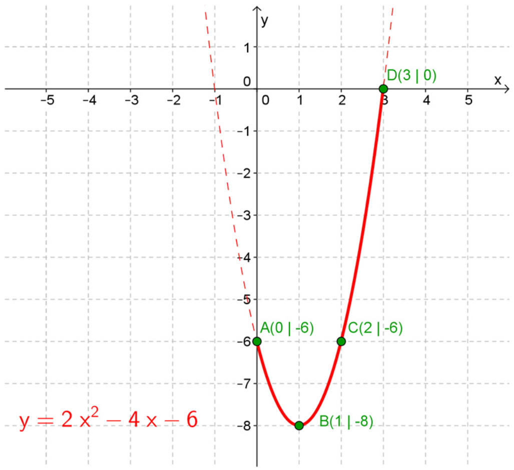
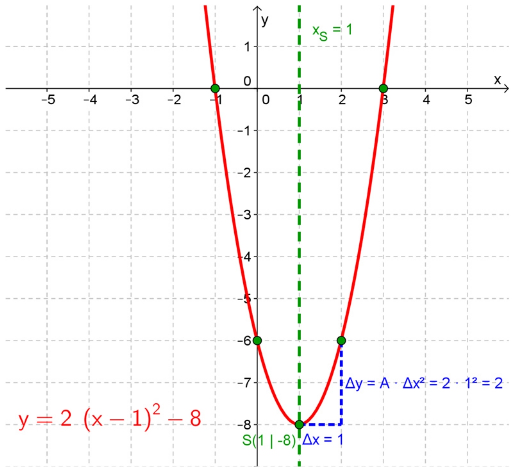
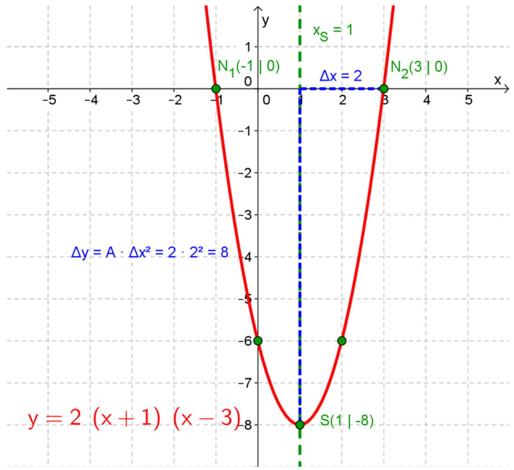
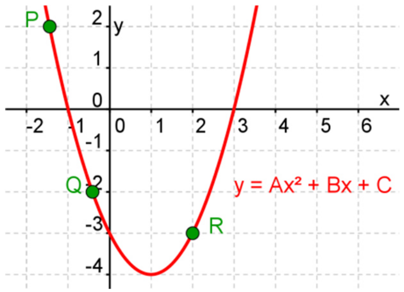
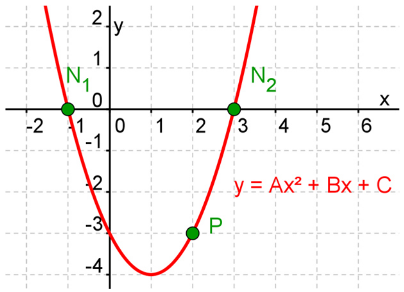
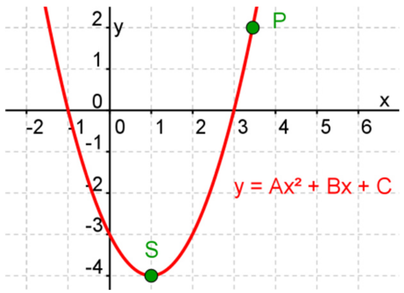
Parabel zeichnen

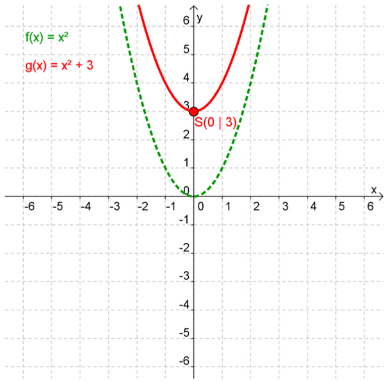
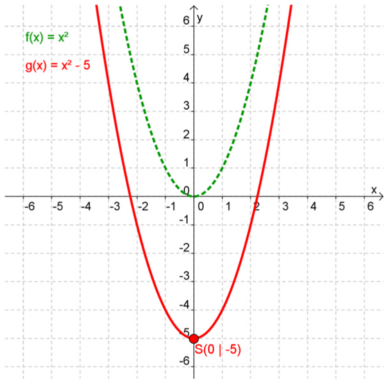
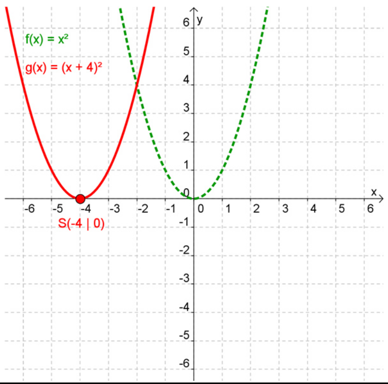
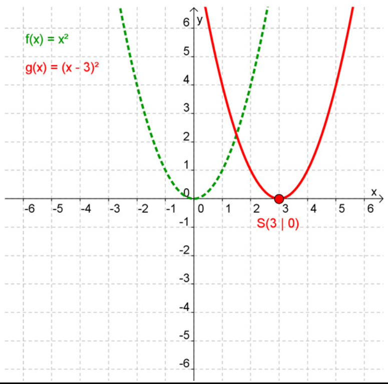
Schritt für Schrittanleitungen unter www.fraengg.ch → Klasse, GeoGebra)

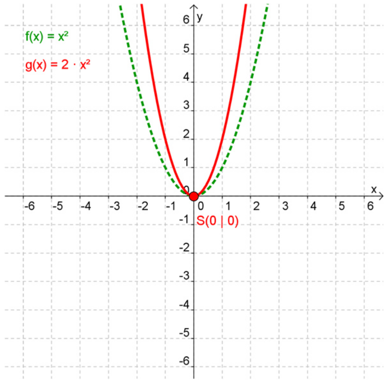
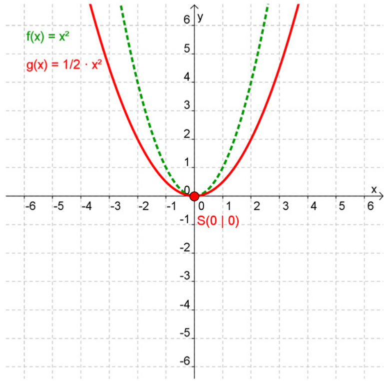
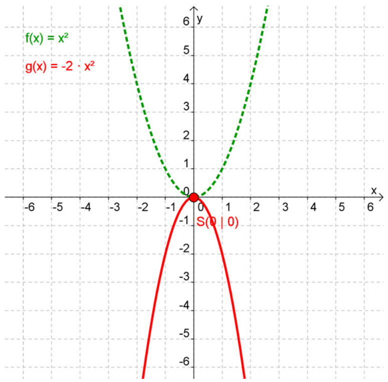
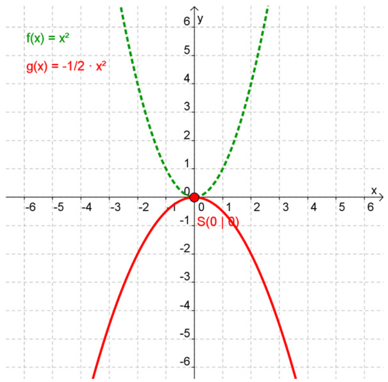
Funktionsgleichung in ABC-Form	Funktionsgleichung in Scheitelform	Funktionsgleichung in Nullstellenform
$y = 2x^2 - 4x - 6$	$y = 2x^2 - 4x - 6$ $y = 2(x^2 - 2x - 3)$ | 2 ausklammern $y = 2\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{Binom}} - 1 - 3\right)$ | quadr. ergänzen $y = 2\left[(x-1)^2 - 4\right]$ | Binom bilden $y = 2(x-1)^2 - 8$ $\quad S(1 \mid -8),\ A = 2$	$y = 2x^2 - 4x - 6 = 0$ | : 2 $x^2 - 2x - 3 = 0$ | faktorisieren od. Formel $(x+1)(x-3) = 0$ $\quad \rightarrow x_1 = \underline{-1} \ \vee \ x_2 = \underline{3}$ $y = 2(x+1)(x-3)$ $\quad N_1(-1 \mid 0),\ N_2(3 \mid 0),\ A = 2$
mit Wertetabelle zeichnen $y(0) = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 6 = -6$ $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6 = -8$ $\underbrace{y(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 6 = -6}_{\text{usw.}}$	mit Scheitel S und Streckfaktor A zeichnen	mit Nullstellen und Streckfaktor A zeichnen
		
Vorteil: funktioniert immer Nachteil: aufwendig	Vorteil: funktioniert immer Nachteil: Scheitelform muss hergeleitet werden	Vorteil: schnell, falls Faktorzerlegung funktioniert Nachteil: funktioniert nicht wenn Nullstellen fehlen!

Funktionsgleichung aus Punkten berechnen

gegeben	gesucht: $y = Ax^2 + Bx + C$	Ansatz	Vorgehen/Bemerkungen
drei Punkte P(x; y), Q(x; y) und R(x; y)		$y = Ax^2 + Bx + C$	Die x- bzw. y-Koordinaten jedes Punktes in die Funktionsgleichung $y = Ax^2 + Bx + C$ einsetzen. Es entsteht ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert als Ergebnis die Parameter A, B und C.
die Nullstellen x_1 bzw. x_2 und P(x; y)		$y = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	Die Nullstellen x_1 bzw. x_2 und die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung $y = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ einsetzen. Die Auflösung liefert den Parameter A. Danach den Parameter A und die Nullstellen in die Funktionsgleichung $y = A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ einsetzen und den Term ausmultiplizieren.
Scheitel $S(x_S; y_S)$ und P(x; y)		$y = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$	Die Koordinaten des Scheitels x_S bzw. y_S und die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung $y = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen. Die Auflösung liefert den Parameter A. Danach den Parameter A und die Koordinaten des Scheitels in die Funktionsgleichung $y = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ einsetzen, den Term ausmultiplizieren und zusammenfassen.

Transformation von Funktionen (siehe Frommenwiler auf den Seiten 163 und 164)

Transformationsregel	Graph (Beispiele)		Bemerkungen
$f(x) = x^2$ $g(x) = f(x) + C$	$C = 3$  	$C = -5$  	**Verschiebung um C in y-Richtung** $C > 0 \rightarrow$ Verschiebung nach oben $C < 0 \rightarrow$ Verschiebung nach unten **Tipp:** Kontrolle mit Nullstelle!
$f(x) = x^2$ $g(x) = f(x - x_S)$	$-x_S = 4 \rightarrow x_S = -4$  	$-x_S = -3 \rightarrow x_S = 3$  	**Achtung!** x_S wird zuerst im Argument addiert, erst danach wird quadriert! **Verschiebung um x_S in x-Richtung** $x_S > 0 \rightarrow$ Verschiebung nach rechts $x_S < 0 \rightarrow$ Verschiebung nach links **Tipp:** Kontrolle mit Nullstelle!

Transformationsregel	Graph (Beispiele)	Bemerkung
$f(x) = x^2$ $g(x) = A \cdot f(x)$	A = 2  A = 1/2  A = −2  A = −1/2 	Streckung/ Stauchung um A in y-Richtung $A > 1 \rightarrow$ Streckung $0 < A < 1 \rightarrow$ Stauchung $A < -1 \rightarrow$ Streckung/Spiegelung $-1 < A < 0 \rightarrow$ Stauchung/Spiegelung

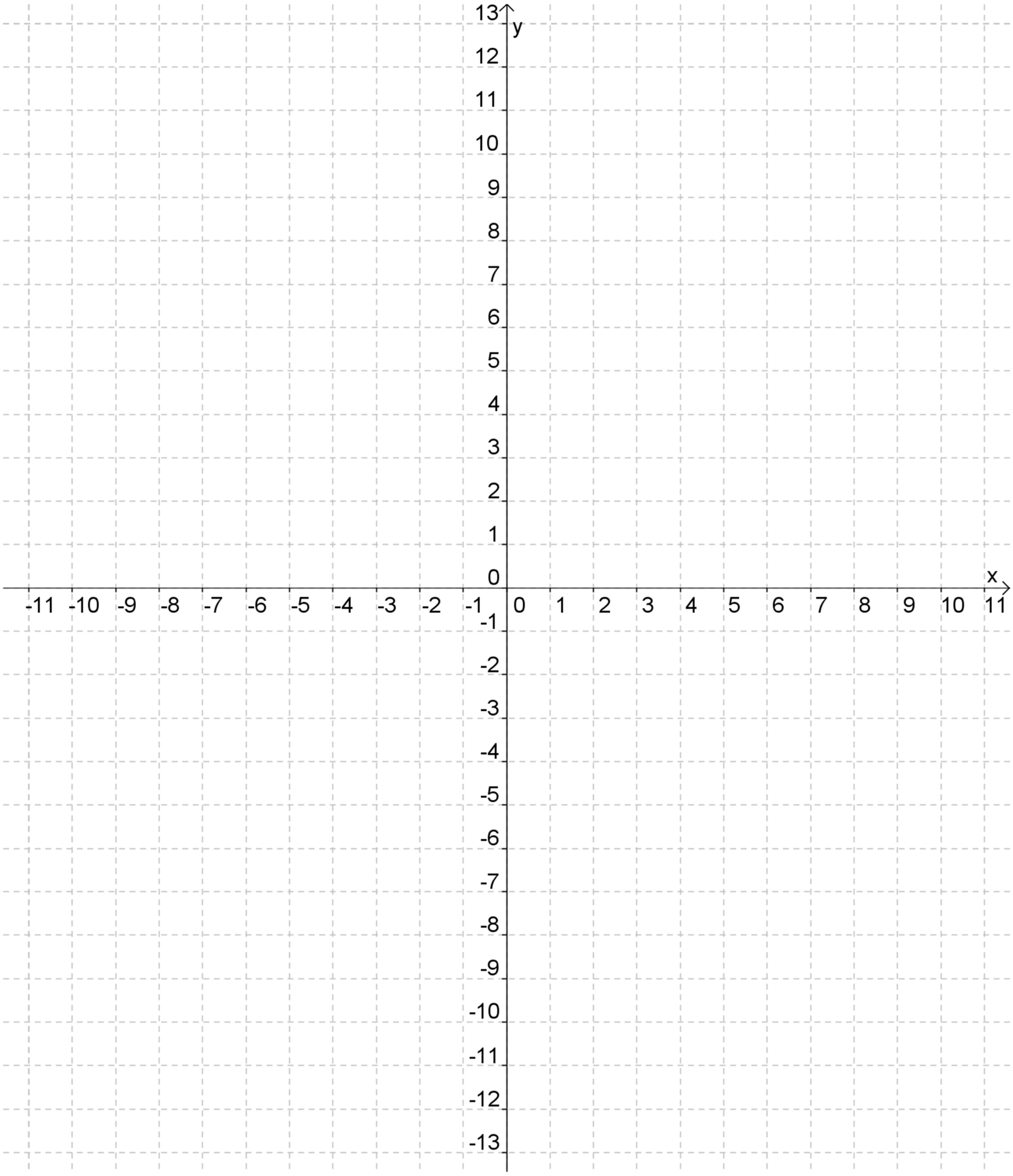
Wichtig: Die Transformationsregeln lassen sich auf alle Funktionen übertragen!

15 Quadratische Funktionen (Übungen

15.1 Scheitelform bestimmen (über die Nullstellen)

1. Gegeben sind folgende Funktionen: $y_1 = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$ und $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$
   a. Berechnen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen.
   b. Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel.
   c. Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.
   d. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen in das Koordinatensystem ein.

Koordinatensystem für Aufgabe 1:



15.2 Scheitelform einer Parabel ist durch drei Punkte bestimmt (A, x_s und y_s)

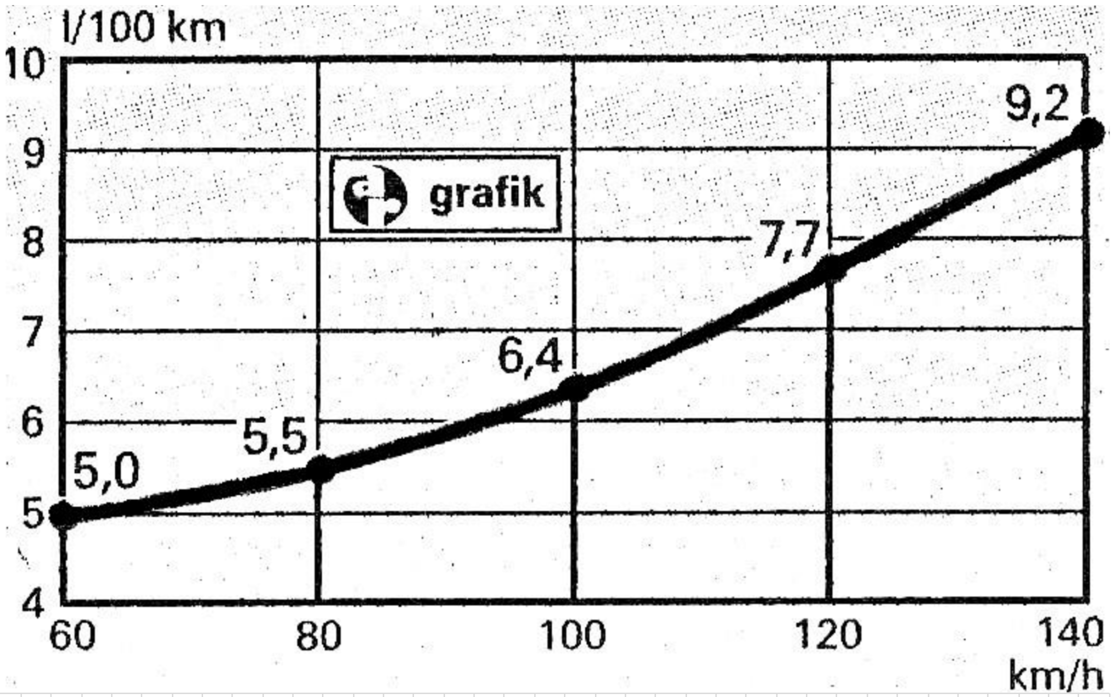
2. Berechnen Sie x_S und y_S so, dass der Graph von $y = (x - x_S)^2 + y_S$ durch die Punkte P (–3 | 5) und Q (5 | 5) geht.

Variante 1 mit Gleichungssystem, P bzw. Q in Scheitelform einsetzen:

Variante 2 mit Ausnutzung der Symmetrie y(P) = y(Q):

15.3 Eine Parabel ist durch 3 Punkte bestimmt (A, B und C)

3. Gemäss einem Testbericht in der Automobil Revue zeigt der Personenwagen Nissan Primera die untenstehende Abhängigkeit des Benzinverbrauches y von der Geschwindigkeit x. Die fünf Messungen ergeben einen Graphen, der dem Ausschnitt aus einer Parabel ähnlich sieht. Verwenden Sie die Punkte $P_1(60;5)$, $P_2(100;6.4)$, $P_3(140;9.2)$ und bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = Ax^2 + Bx + C$ der Parabel, welche durch diese drei Punkte verläuft.

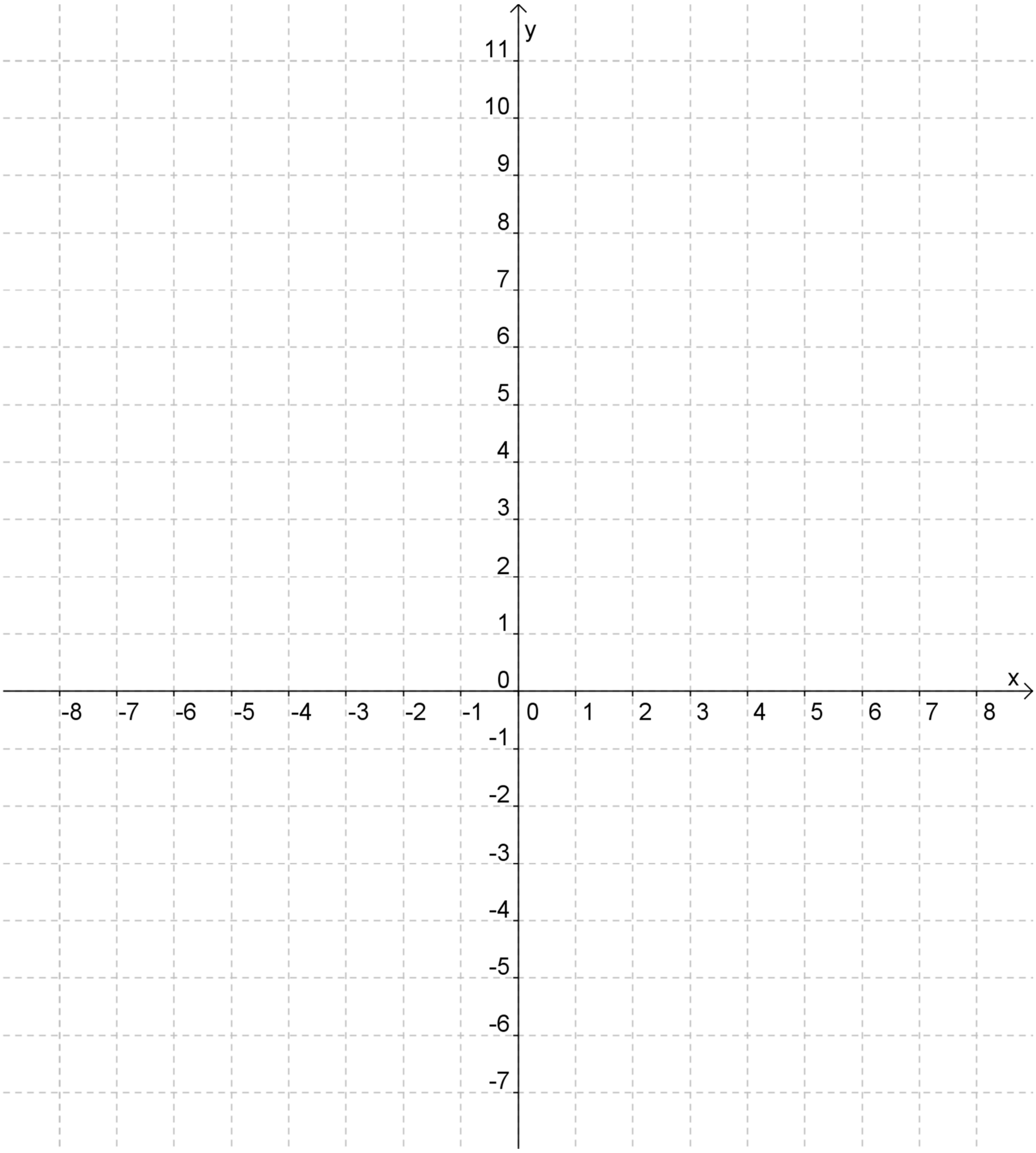


15.4 Schnittpunkte von Funktionen

4. Gegeben sind die Parabel $y = -x^2 + 4x + 5$ und die Gerade $y = 2x + 1$. Bestimmen Sie:

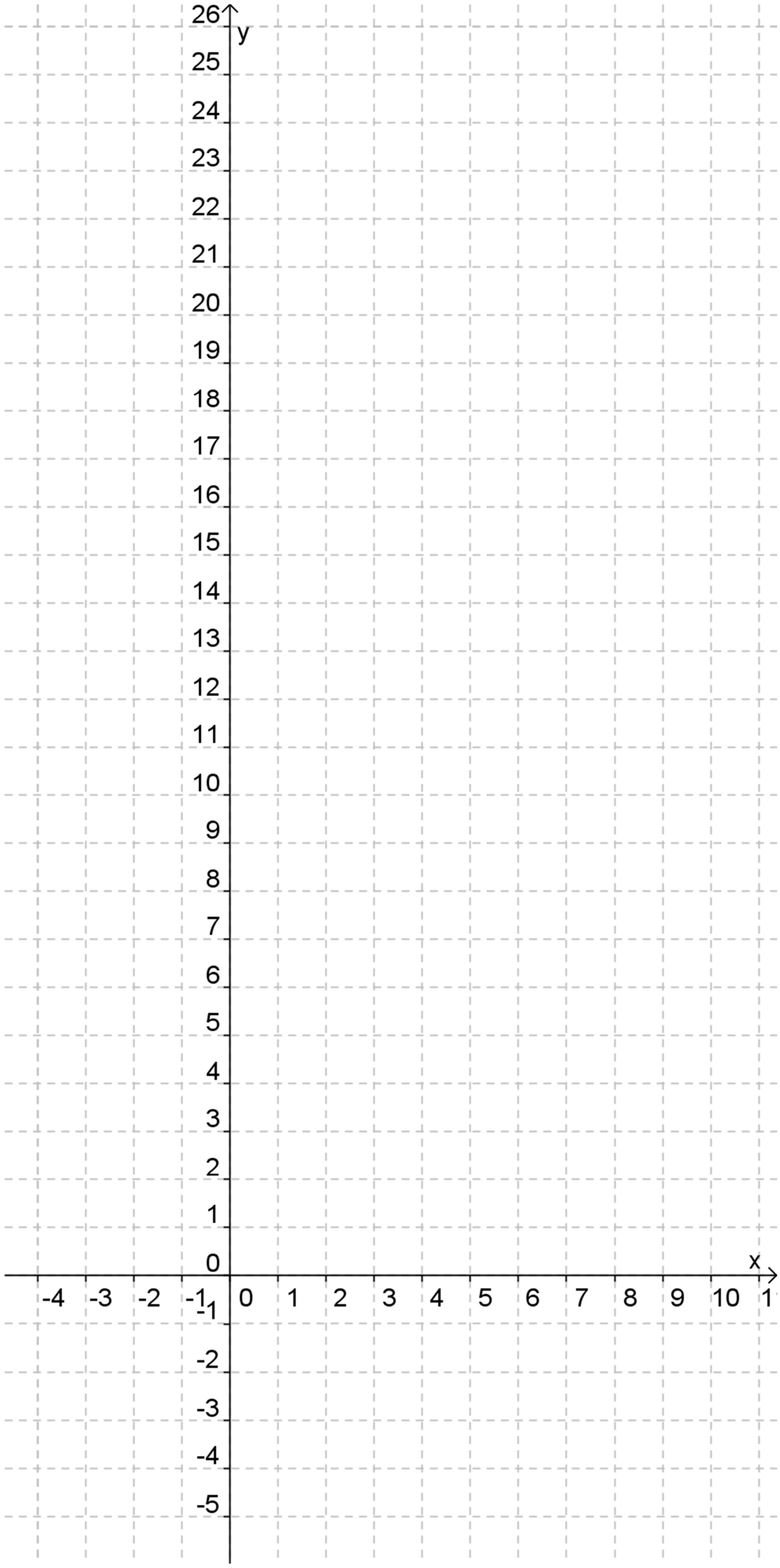
   a. den Scheitelpunkt S der Parabel.
   b. die Schnittpunkte A und B der Parabel mit der Geraden.
   c. den y-Achsenabschnitt b der Geraden $y = 2x + b$ so, dass die Gerade die Parabel berührt. Wie heissen die Koordinaten des Berührungspunktes C?
   d. Zeichnen Sie die Graphen in das folgende Koordinatensystem ein.

Koordinatensystem für Aufgabe 4:



5. Eine Parabel geht durch den Ursprung des Koordinatensystems. Der zweite Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse, sowie der Scheitelpunkt liegen auf der Geraden $y = -3x + 24$.
   a. Berechnen Sie die 2. Nullstelle und die Koordinaten des Scheitels der Parabel.
   b. Wie heisst die Funktionsgleichung der Parabel?
   c. Stellen Sie die Gerade und die Parabel graphisch dar (K-System auf nächster Seite).

Koordinatensystem für Aufgabe 5:



6. Die quadratische Funktion $y = Ax^2 + Bx + 3$ ($x, A, B \in \mathbb{R}$) besitzt den Scheitelpunkt $S(1;y_S)$ und es gilt $y(4) = -5$.

   a. Berechnen Sie A, B und y_S. Bestimmen Sie anschliessend die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen (K-System folgt auf den nächsten Seiten).

   b. Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch den Scheitelpunkt S und die grössere der beiden Nullstellen geht?

Koordinatensystem für Aufgabe 6: