

3 Zerlegen in Faktoren (Ausklammern)

3.1 Einführung

$3a + 3b$	=	$3 \cdot (a + b)$
↓		↓
Summe		Produkt

Merke:

Haben alle Summanden einer algebraischen Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen gemeinsamen Faktor ausklammern. Die Summe wird dadurch in ein Produkt umgewandelt.

3.2 Aussondern eines gemeinsamen Faktors aus allen Gliedern zugleich

$15ab - 21bc + 9b$	=	$3b(5a - 7c + 3)$
Polynom mit 3 Gliedern		Faktoren

Beispiele:

1. $15a + 10a^2b - 5a = 10a + 10a^2b = 10a(1 + ab)$
2. $3ab - 9ac + 6ax = 3a(b - 3c + 2x)$
3. $\frac{8a}{5b} - \frac{2ax}{b} + \frac{6a}{b^2} = \frac{2a}{b} \left(\frac{4}{5} - \frac{x}{1} + \frac{3}{b} \right)$
4. $x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x - y)$
5. $2a(2x - y) - (2x - y) = (2x - y)(2a - 1)$
6. $m + n + x(m + n) = (m + n)(x + 1)$
7. $-a + 2x(a - b) + b = -a + b + 2x(a - b) = (a - b)(2x - 1)$

3.3 Aussondern eines gemeinsamen Faktors aus Gruppen von zwei und mehreren Gliedern

$$21ax - 6x - 35a + 10 = 3x(7a - 2) - 5(7a - 2) = (3x - 5)(7a - 2)$$

Beispiele:

1. $5bx - bx - 15bx = ?$

$$bx(5 - 1 - 15) = bx(-11) = \underline{\underline{-11bx}}$$

2. $mx + my - nx - ny = ?$

$$m(x + y) - n(x + y) = \underline{\underline{(m - n)(x + y)}}$$

3. $ac - cx + a - x = ?$

$$c(a - x) + 1(a - x) = \underline{\underline{(a - x)(c + 1)}} \quad \text{oder} \quad a(c + 1) - x(c + 1) = \underline{\underline{(a - x)(c + 1)}}$$

4. $ac + bc - ad - bd = ?$

$$c(a + b) - d(a + b) = \underline{\underline{(a + b)(c - d)}}$$

5. $ab + 5b + ac + 5c = ?$

$$b(a + 5) + c(a + 5) = \underline{\underline{(a + 5)(b + c)}}$$

6. $7(a-2b)(2x-3y) - 5(a-2b)(3x-y) = ?$

$$(a-2b)[7(2x-3y) - 5(3x-y)] = (a-2b)[14x - 21y - 15x + 5y] = \underline{\underline{(a-2b)(-x-16y)}}$$

7. $4ac - 4ad + 3c^2 - 3cd = ?$

$$4a(c-d) + 3c(c-d) = \underline{\underline{(c-d)(4a+3c)}}$$

8. $20ab + 4b - 5a - 1 = ?$

$$4b(5a+1) - 1(5a+1) = \underline{\underline{(5a+1)(4b-1)}}$$

9. $2x^2 + 10xy - 12xz + 5x + 25y - 30z = ?$

$$x(2x+5) + 5y(2x+5) - 6z(2x+5) = \underline{\underline{(2x+5)(x+5y-6z)}}$$

10. $3r^2 - 2rs - 5rt - 3r + 2s + 5t = ?$

$$3r(r-1) - 2s(r-1) - 5t(r-1) = \underline{\underline{(r-1)(3r-2s-5t)}}$$

3.4 Übungen

1. $25 \cdot 11 + 15 \cdot 25 - 2 \cdot 25$

2. $bx - b$

3. $ax - 4az + 5ay$

4. $(a + b) \cdot n + (a + b) \cdot m$

5. $(b - c) \cdot z + b - c$

6. $am + bm - cm + xm$

7. $(4a - 2b) \cdot (x + y) - (3a + 4b) \cdot (x + y)$

8. $2ax + 2ay + 3bx + 3by$

9. $(c + 3d) \cdot 4a - c - 3d$

10. $axnd - axnc + abnd - abnc$

11. $6x^3y^2 - 8x^2y^3$

12. $60a^3b^3c^2 + 70a^2b^2c^2 - 30ab^3c^3$

3.5 Rückbildung zum Quadrat eines Binoms

Definition:

Tritt ein Term mehrfach als Faktor auf, so kann er als Potenz geschrieben werden. Die so entstehenden Gleichungen heissen binomische Formeln.

Für alle $a, b \in \mathbf{Z}$ gilt:

$$\text{I.} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{II.} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{III.} \quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Beispiele:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1. & 4x^2 & - & 28x & + & 49 & = (2x - 7)^2 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \text{Quadrat} & & \text{doppeltes Produkt} & & \text{Quadrat} & \\
 & \text{(Basis = 2x)} & & \text{beider Basen} & & \text{(Basis = 7)} & \\
 & & & (2 \cdot 2x \cdot 7 = 28x) & & &
 \end{array}$$

$$2. \quad x^2 + 10x + 25 = ?$$

$$\underbrace{x^2}_{\text{Quadrat}} + 10x + \underbrace{25}_{\text{Quadrat}} = (x + 5)^2$$

$$3. \quad 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4 = ?$$

$$(2a^2)^2 - 4a^2b^2 + (b^2)^2 = (2a^2 - b^2)^2$$

$$4. \quad 3n^2 - 6n + 3 = ?$$

$$3(n^2 - 2n + 1) = 3(n - 1)^2$$

$$5. \quad 4a^2 - 4ab + b^2 = ?$$

$$(2a)^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2$$

$$6. \quad 2x^4 - 4x^2y^2 + 2y^4 = ?$$

$$2(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 2[(x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2] = 2(x^2 - y^2)^2$$

3.6 Rückbildung zum Produkt aus Summe und Differenz aus gleichen Gliedern

Beispiele:

$$1. \quad \begin{array}{ccc} 4a^2 & - & 25 & = & (2a+5)(2a-5) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Quadrat} & & \text{Differenz} & & \\ \text{(Basis = 2a)} & & & & \\ & & \text{Quadrat} & & \\ & & \text{(Basis = 5)} & & \end{array}$$

2. $100 - c^2 = ?$

$$10^2 - c^2 = (10+c)(10-c)$$

3. $64x^2 - 1 = ?$

$$(8x)^2 - (1)^2 = (8x+1)(8x-1)$$

4. $x^2 - 16 = ?$

$$x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$$

5. $4m^4 - 9n^4 = ?$

$$(2m^2)^2 - (3n^2)^2 = (2m^2+3n^2)(2m^2-3n^2)$$

6. $(4x+2y)^2 - 9y^2 = ?$

$$(4x+2y)^2 - (3y)^2 = (4x+2y+3y)(4x+2y-3y) = (4x+5y)(4x-y)$$

7. $(a-b)^2 - (a+b)^2 = ?$

$$(a-b)^2 - (a+b)^2 = [(a-b)+(a+b)] \cdot [(a-b)-(a+b)] = (a-b+a+b)(a-b-a-b) = -2b(2a) = -4ab$$

3.7 Rückbildung in zwei ungleiche Binome

Beispiele:

$$1. \quad 1x^2 \quad - \quad 7x \quad + \quad 12 \quad = (x-3)(x-4)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\text{Quadrat} \qquad \qquad \qquad (-3) + (-4) \qquad \qquad \qquad (-3) \cdot (-4)$$

$$\text{mit Koeff. 1} \qquad \qquad \qquad \text{Summe} = -7 \qquad \qquad \qquad \text{Produkt} = -12$$

2. $x^2 - 6x + 5 = ?$

$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

$$\qquad \qquad \qquad \underbrace{+5}_{(-1)(-5)}$$

3. $h^4 - 7h^2i - 18i^2 = ?$

$$h^4 - 7h^2i - 18i^2 = (h^2 + 2i)(h^2 - 9i)$$

$$\qquad \qquad \qquad \underbrace{-18i^2}_{(2i)(-9i)}$$

4. $h^4 + 7h^2i - 18i^2 = ?$

$$h^4 + 7h^2i - 18i^2 = (h^2 - 2i)(h^2 + 9i)$$

$$\qquad \qquad \qquad \underbrace{-18i^2}_{(-2i)(9i)}$$

5. $y^2 - 17y + 60 = ?$

$$y^2 - 17y + 60 = (y-5)(y-12)$$

$$\qquad \qquad \qquad \underbrace{+60}_{(-5)(-12)}$$

3.8 Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn Koeffizient $\neq 1$ ist

Beispiele:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1. & 10x^2 & + & 19x & + & 6 & = (2x+3)(5x+2) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 2x \cdot 5x & & & & 3 \cdot 2 & \\
 & \underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & \\
 & & & 5x \cdot 3 = 15x & & & \\
 & & & 2x \cdot 2 = 4x & & & \\
 & & & \text{Summe} = 19x & & &
 \end{array}$$

Grundlegendes Vorgehen:

- Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wie Sie zwei ganzzahlige Zahlen multiplizieren können, um den Faktor vor der quadratischen Variable zu erhalten (10).
- Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wie Sie zwei ganzzahlige Zahlen multiplizieren können, um den konstanten Term zu erhalten (6).
- Bestimmen Sie die Summe des mittleren Terms analog dem obigen Schema. Falls die Summe mit dem mittleren Term übereinstimmt, haben Sie die korrekten Faktoren gefunden. Falls nicht probieren Sie eine neue Kombination aus. **Achtung:** $2x \cdot 5x$ mit $3 \cdot 2$ liefert ein anderes Ergebnis als $2x \cdot 5x$ mit $2 \cdot 3$. Dies müssen Sie beim Ausprobieren einer neuen Kombination berücksichtigen. Hier der Beweis:

$$\underbrace{(2x+3)(5x+2)}_{10x^2+19x+6} \neq \underbrace{(2x+2)(5x+3)}_{10x^2+16x+6}$$

- Ordnen Sie die Terme analog dem Schema an und machen Sie die Kontrolle durch Zurückmultiplizieren.

2. $18a^2 + 39ab + 20b^2 = ?$

$$\begin{array}{l}
 18a^2 + 39ab + 20b^2 = (3a + 4b)(6a + 5b) \\
 \begin{array}{l}
 (1a)(18a) \\
 (2a)(9a) \\
 (3a)(6a)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (1b)(20b) \\
 (2b)(1b) \\
 (2b)(10b) \\
 (10b)(2b) \\
 (4b)(5b) \\
 (5b)(4b)
 \end{array}
 \end{array}$$

3. $6x^2 - 2xy - 20y^2 = ?$

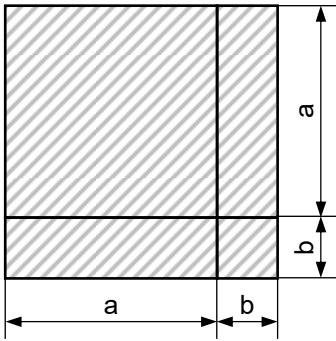
$$\begin{array}{l}
 6x^2 - 2xy - 20y^2 = 2[3x^2 - xy - 10y^2] = 2(x-2y)(3x+5y) \\
 \begin{array}{l}
 (1x)(3x) \\
 (-y)(10y) \\
 (10y)(-y) \\
 (y)(-10y) \\
 (-10y)(y) \\
 (-2y)(5y) \\
 (5y)(-2y) \\
 (2y)(-5y) \\
 (-5y)(2y)
 \end{array}
 \end{array}$$

4. $12u^2 - 36uv + 24v^2 = ?$

$$12u^2 - 36uv + 24v^2 = 12 \left[\underbrace{u^2}_{u \cdot u} - 3uv + \underbrace{2v^2}_{(-v)(-2v)} \right] = 12(u-v)(u-2v)$$

3.9 Geometrische Interpretation der binomischen Formeln

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figuren:

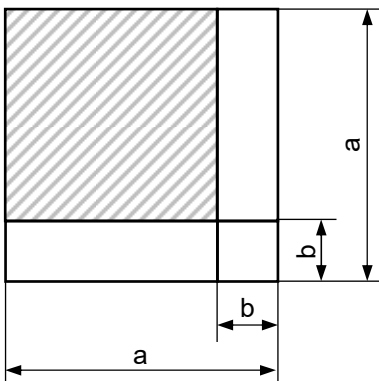


1. Binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Quadrat
doppeltes Produkt
Quadrat
beider Summanden
Summe

mit Symbolen: $(\Delta+O)^2 = \Delta^2 + 2\Delta O + O^2$

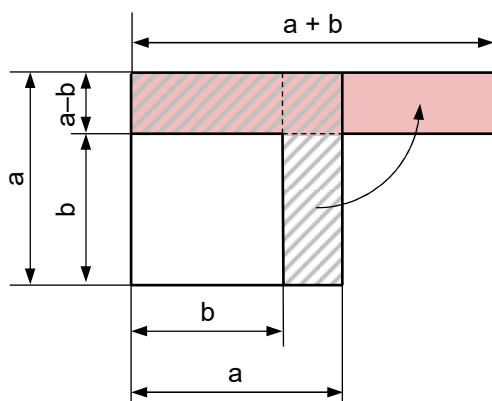


2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Quadrat
doppeltes Produkt
Quadrat
beider Summanden
Summe

mit Symbolen: $(\Delta-O)^2 = \Delta^2 - 2\Delta O + O^2$



3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Quadrat
Quadrat
Summe

mit Symbolen: $(\Delta+O)(\Delta-O) = \Delta^2 - O^2$

3.10 Übersicht über die verschiedenen Vorgehensweisen

1. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus allen Gliedern.	$\underbrace{15ab - 6ac + 3ad}_{\text{Summe}} = 3a \underbrace{(5b - 2c + d)}_{\text{Produkt}}$
2. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus Gruppen von zwei oder mehreren Gliedern (mehrmaliges Ausklammern).	$\underbrace{21ax - 6x}_{3x(7a-2)} - \underbrace{35a + 10}_{-5(7a-2)} = 3x \underbrace{(7a - 2)} - 5 \underbrace{(7a - 2)} = \underbrace{(7a - 2)}(3x - 5)$
3. Differenz zweier Quadrate (Binom). Typ: $a^2 - b^2$	$\underbrace{a^2}_{\text{Quadrat}} - \underbrace{b^2}_{\text{Quadrat}} = (a - b)(a + b)$
4. Rückbildung zum Quadrat eines Binoms. Typen: $a^2 + 2ab + b^2$ bzw. $a^2 - 2ab + b^2$	$\underbrace{4x^2}_{\text{Quadrat (Basis 2x)}} - \underbrace{28x}_{\text{doppeltes Produkt der beiden Basen } 2(2x \cdot 7)} + \underbrace{49}_{\text{Quadrat (Basis 7)}} = (2x - 7)^2$
5. Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat 1 ist.	$\underbrace{1x^2}_{\text{Quadrat mit Faktor 1}} + \underbrace{7x}_{\text{Summe (3)+(4)}} + \underbrace{12}_{\text{Produkt (3)(4)}} = (x + 3)(x + 4)$
6. Rückbildung in zwei ungleiche Binome, wenn der Faktor vor dem Quadrat $\neq 1$ ist.	$\underbrace{10x^2}_{\text{Quadrat mit Faktor } \neq 1}} + \underbrace{19x}_{\text{Summe } 5x \cdot 3 + 2x \cdot 2}} + \underbrace{6}_{\text{Produkt } 3 \cdot 2}} = (2x + 3)(5x + 2)$
7. Rückbildung von Summen und Differenzen gleichhoher ungerader Potenzen.	$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $(a^5 - b^5) = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ $(a^7 - b^7) = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$ <p>usw.</p> $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $(a^5 + b^5) = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ $(a^7 + b^7) = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$ <p>usw.</p>

3.11 Übungen**Potenzieren von Summen**

1. $(y + 1)^2$

2. $(4 - v)^2$

3. $(2x + 3y)^2$

4. $(t + 1)(t - 1)$

5. $(9 + 3a)(9 - 3a)$

6. $(z^2 - 2)^2$

7. $(6m - 6n)^2$

8. $(x + 2)(x - 2)$

9. $(a + b - c)^2$

10. $(2u^2 - 3v^2)^2$

11. $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

12. $(5 + m)^2 - (3 - m)^2$

Zerlegen in Faktoren

13. $6ax + 6ay$
14. $(4a - 2b) \cdot (x + y) - (3a + 4b) \cdot (x + y)$
15. $x + y + ax + ay$
16. $3a \cdot (x - 2) - x + 2$
17. $16my - 24ny + 18y$
18. $3a^2 + 2ab + 6a + 4b$
19. $ab + 5b - ac - 5c$
20. $20ab + 4b - 5a - 1$
21. $45mn - 30m^2 + 6an - 4am$
22. $4a \cdot (x + y) + x + y$
23. $x^2 - 1$
24. $9x^3 - 36x$
25. $16a^2 + 24ab + 9b^2$
26. $2x^2 - 4x + 2$
27. $a^2 - a - 30$
28. $2ax + ay + az - 2bx - by - bz$
29. $15a^2b^2 + 25ab^3$
30. $45a^2y^2 - 63a^2y^3 + 36a^3y^2$
31. $4x^3 - 10x^2y - 24xy^2$

Kürzen

32. $\frac{x^3 + 2x^2 + x}{2x + 2}$
33. $\frac{5am + 7an - 10bm - 14bn}{3a - 6b}$
34. $\frac{a^2 - b^2 + 4a + 4b}{a^2 + 2ab + b^2}$

Zerlegen in Faktoren

35. $25ab + 125ac - 75ax$

36. $7ax - 14a - 21$

37. $x^2 + ax + ab + bx$

38. $b(4n + 3m) + 4n + 3m$

39. $z(b - c) - c + b$

40. $2ax - 2ay + bx - by - cx + cy$

41. $(c + 3d)4a - c - 3d$

42. $(a - c)(15xy + 12bx) - (5bx + 10xy)(a - c)$

43. $b^4 - 16b^2$

44. $9b^3 - b$

45. $x^4 - 16$

46. $b^2 - 4b + 4$

47. $\frac{a^2 + ax}{a^2 - ax}$

48. $\frac{81a^2 - 49b^2}{63a - 49b}$

49. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4}$

50. $\frac{a^4 - 1}{a^2 - 1}$

51. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

52. $\frac{(x + 3)(x - 5)}{2x^2 - 18}$